2 Mehrwertige Aussagenlogik

2.1 Überblick

Eine **wertebasierte Aussagenlogik** – die gängige 2-wertige Logik eingeschlossen – wird (aus den eben angedeuteten Gründen) heute meist sehr „formal“ – wie ein „Schema“ – in zwei Teilen aufgebaut:
Im sogenannten **Syntax-Schema** (s.v.w. Schema für „Kompositionsregeln“ von Zeichen) konstruiert man eine Menge **P** von „Sprachelementen“, die mit Hilfe von vorab gewählten Verbindungszeichen kombiniert werden dürfen und so zu weiteren Sprachelementen führen. Mit **P** wird ein schematischer *Sprachvorrat* geschaffen, den man dann versucht, auf Bekanntes anzuwenden / zu „deuten“; dieser Deutungsvorgang wird selbst wiederum stark schematisiert.

Im sogenannten **Semantik-Schema** (s.v.w. Schema für „Deutung“ der Sprachelemente von **P**) denkt man sich eine Abbildung der Komposite von **P** auf einen vorab ausgewählten endlichen **Bewertungsbereich B**, der eine vorab definierte **algebraische Struktur (B, Verknüpfungen)** besitzt. Die Abbildung soll zweierlei leisten: Zum einen weist sie jedem in **P** erlaubten Verbindungszeichen je genau eine **algebraische Verknüpfung** der algebraischen Struktur von **B** zu. Zum andern gestattet sie, durch variable „Bewertungszuordnungen“ den Kompositen von **P** variable „logische Werte“, also Elemente der Menge **B,** zuzuweisen. Die so konstruierte Logik ist dann das Tripel **(P, B, γ)** definiert durch ein „Syntax-Schema“ und ein „Semantik-Schema“. In der klassischen Logik besteht **B** aus nur zwei Werten, **B**={0, 1}, und es genügen in **B** die durch 0*=1, 1*=0 bzw. durch 0+0=0, 0+1=1+0=1+1=1 festgelegten Verknüpfungen * und +. Dem entsprehen in **P** die beiden Verbindungszeichen $\neg := \gamma^{-1}(*)$ und $\vee := \gamma^{-1}(+)$.

Sowohl ein Syntax-Schema als auch ein zugehöriges Semantik-Schema gehören einer gewissen Sprachstufe an, die man als die **Objektstufe** gegenüber der Sprachstufe bezeichnet, in der diese Schemata definiert / beschrieben werden. Von „wirklicher Inhaltsgebung“ der Elemente von **P**, wie man es als Nicht-Mathematiker normalerweise versteht, kann ***auch im Semantik-Schema noch nicht die Rede sein***. Eine Logik **(P,B,γ)** der Objektstufe wird erst dann mit „Inhalt“ gefüllt, wenn man geeignete *Anwendungen* aus bekannten (mathematischen oder außermathematischen) Gebieten findet, die zu dem Schema **(P,B,γ)** (mehr oder weniger) „passen“.

Wie sonst auch in außermathematischen Bereichen, kann „Bedeutung“ / „Inhaltsgebung“ von Sprachwendungen ***nicht ein für alle mal und nicht für alle Anwendungskontexte gleich*** festgelegt werden, sondern ist **kultur- und geschichtsabhängig** und entsteht (und vergeht wieder!) durch den ***gemeinsamen Gebrauch von Sprache***.

Einmal erworbenes „Wissen“ ist eben ***<u>nicht</u>*** – wie viele Leute sich das gerne wünschen und glauben – ab dem Zeitpunkt seiner kollektiven Erwerbung ein für allemal gesichert. Sogar das in der **Mathematik** im Lauf der Jahrhunderte angesammelte „Wissen“, ist kultur- und zeitabhängig – ***und vieles davon wird wieder obsolet***.
So entspringen denn auch unsere in dieser Note zusammengetragenen Bemühungen dem „Zeitgeist“ des vergangenen (20-ten) Jahrhunderts. Vierhundert Jahre früher hätte die Mehrheit der Mathematiker damit nichts anfangen können. Vierhundert Jahre später würde wohl mancher Theoretiker oder Wissenschaftler über diese Bemühungen schmunzeln oder ihre Problematik vielleicht gar nicht mehr verstehen.

2.2 Syntax-Schema

2.2.1 Vorbemerkung: Buchstabenschrift

Ohne das Prinzip einer *linearen* ***Buchstabenschrift*** hätte sich eine moderne (westliche) Logik wohl nie entwickeln können.

Die Idee eines wirklichen „Alphabets", besteht aus wenigen (etwa 30) Schriftzeichen, die von ihrer jeweiligen ursprünglichen ***Bedeutung losgelöst worden sind****.*

Mit diesen Schriftzeichen – „Buchstaben" – lassen sich dann wieder *bedeutungstragende* Elemente[5], nämlich „Wörter", „Sätze" und „Satzgefüge", als **Schriftzeichenfolgen** nachbilden. Diese Idee, wurde etwa im 14. Jh. v.C. aus dem schon lange vorher bestehenden Zeichenvorrat der Keilschrift wahrscheinlich in **Ugarit** (heute: Nordwest Syrien) entwickelt. Es hat dann noch etwa 300 Jahre gedauert, bis genügend viele Leute die Tragweite dieser Idee erkannt hatten. Dann verbreitete sich diese Idee in vielen Alphabetvarianten schnell auf fast alle Nachbarländer des Vorderen Orients, des Mittelmehrraumes, des Kaukasusgebiets, bis schließlich nach Indien und später, unter indischem Einfluss, auch nach Tibet und Teilen Südostasiens – **mit Ausnahme von China** (teilweise auch Japan, Korea).

Das gesamte Konzept einer formalen (Schrift(!)-)Sprache beruht auf Regeln, wie man mit ***endlichen linear geordneten Zeichenreihen auf Basis eines vorab vereinbarten*** (kleinen) ***Alphabets*** umgeht.

Wie das in einer 2-dimensionalen Bilderschrift in befriedigender Weise vor sich gehen müsste, können wir uns nur schwer vorstellen. In **China** hat man zu den dort gebräuchlichen silbenorientierten Quasi-Bild-Schriften kein kurzes Alphabet, und keine dazugehörige einheitliche lexikographische Grundordnung[6] (die der Grundordnung, etwa a, b, c,... unseres lateinischen Alphabets, entsprechen würde), sondern nur eine zwischen früher ca. 500 und später ca. 200 Elementen variierende Menge von sog. „Radikalen", die in Bildzeichen enthalten sind. Chinesische Schüler können also zu Anfang nicht einfach 30 Grundzeichen und ihre normierte Grundreihenfolge auswendig lernen, sondern müssen eine viel größere Menge von Grundzeichen lernen, deren Grundreihenfolge zudem nicht oder unterschiedlich oder nicht-linear angeordnet ist. Damit erfasst man aber gar nicht alle der (im Chinesischen etwa 80.000) Bildzeichen, sondern nur einige tausend. Außerdem versteht ein **Chinese** diese Radikale nur im Zusammenhang mit anderen Zeichen. **„Bedeutung" und Zeichen sind für ihn nicht trennbar**. – Ein für unser (westliches) Empfinden ziemlich unbefriedigendes Verfahren. Vgl. etwa [Wiki.Ch.S], [Wiki.Ch.R], [Wiki.Ch.W].

Eine private Spekulation am Rande: Trotzdem gibt es offensichtlich auch noch andere Möglichkeiten menschlichen Wissenserwerbs als mit dem Mittel eines linearen Alphabets, lexikalisch angeordneter Stichworte / Begriffe und schließlich der (im besonders im Westen vorangetiebenen „Logik". Zum Beispiel findet man auch bei uns im Westen selten, dass ein etwa 11-jähriger Schüler den Erwerb seines Schulwissens mit Hilfe eines Lexikons oder mit den Indexregistern in seinen Lehrbüchern unterstützt. Er lernt „anders" als wir Erwachsenen. Sein Lernen bleibt dadurch zwar in gewisser Weise zunächst „rudimentär" aber in anderer Hinsicht „ganzheitlicher". Diese „ganzheitliche" Art des Wissenserwerbs wird aber mit und nach der Pubertät nicht mehr vom westlichen Schulwesen unterstützt. Statt dessen wird der „lineare" Wissenserwerb (Listen, Lexika, lineare Reihenfolgen, Wege in Baumstrukturen usw. ...) stark gefördert; so dass wir erwachsenen Westler es uns nicht mehr vorstellen können, dass man mit vorpubertären, vorbewussten, intuitiven, nichtlinearen Wissensaneignungsmethoden genau so weit kommen könnte. Im chinesischen Kulturraum, wo ein lineares Alphabet fehlt und „Lexika", große Listen usw... nur mit für die chinesische Sprache „unnatürlichen" Mitteln gepaukt werden müssen, entwickelt sich nach meiner Ansicht die Methode des vorpubertären, „ganzheitlichen" / „nichtlinearen" Wissenserwerbs notgedrungen viel weiter als bei uns und erreicht einen Perfektionsgrad, der für uns Westler unvorstellbar ist. – Daher bin ich der Ansicht, dass die rigorose Perfektion unserer (westlichen) „Logik", so wie sie sich besonders im 20.Jh. in Europa und den USA entwickelt hat, für Menschen keine absolut notwendige sondern eine **kulturabhängige** ist. – Könnte es nicht sein, dass unsere westliche (mathematisch orientierte) Logik für die Informatik so gut wie obsolet wird, sobald wir für jedermann erschwingliche Parallelrechner entwickelt haben, die weitgehend wie neuronale Netze arbeiten?

Unter einem Alphabet **Z** versteht man heute eine nicht-leere endliche (oder abzählbare) Menge von *unterscheidbaren*[7] Zeichen. Aus **Z** kann man beliebig viele end-

---

[5] Wenn ich die gängige Sprechweise benutze *„Zeichenreihen tragen Bedeutung ...",* meine ich damit natürlich nicht, dass „Bedeutung" **immanente Eigenschaft** solcher Zeichenreihen seien, sondern dass „Bedeutung" solchen Zeichenreihen im Verlauf eines kollektiven *menschlichen Verständigungsprozesses* zugeordnet worden ist. Es gab allerdings in der Tat Zeiten, da manche glaubten, Zeichen / Zeichenreihen trügen ihre „Bedeutung" *in sich*, unabhängig von einer menschlichen Perzeption in einer gewissen Zeitepoche. Solche Leute findet man sporadisch sogar heute noch in der alt-ehrwürdigen Gruppe der sog. (philosophischen) „**Ontologen**".

[6] Vgl. im Glossar: „lexikographische Ordnung"

[7] Die Menge {*, **} ist zum Beispiel als Alphabet unbrauchbar, nicht etwa weil sie zu klein wäre, sondern weil man die Zeichenreihe *** nicht eindeutig lesen kann: Man kann nicht unterscheiden, ob es

liche, linear angeordnete Zeichenreihen („Wörter“) bilden. Die Menge dieser „Wörter“ ist abzählbar (siehe 2.1.3). Nicht jedes dieser Wörter wird „sinnvoll“ sein. „Sinn“ entsteht dadurch, dass man ***für einen bestimmten Zweck*** gegebenenfalls unterschiedliche Zeichensorten unterscheidet und die Wörter ***nach bestimmten Regeln*** bildet. (Dabei ist „Sinn“ noch nicht mit „Bedeutung“ gleichzusetzen!)

2.2.2 Definition eines formalen Sprachvorrats P

(2.1.1) DEF.Alphabet: Das Alphabet der formalen Sprache einer Aussagenlogik besteht aus folgenden Sorten von Zeichen:

(1) Einer **endlichen** oder auch **abzählbaren**[8] Menge **E** von Zeichen, notiert hier als Kleinbuchstaben a, b, ..., e, ... Die Elemente von **E** heißen **Elementaraussage-Zeichen,** kurz: **EA-Zeichen** (oft auch **„Atome“ oder „Aussagevariablen“** genannt[9]).

(2) Zwei endlichen (kleinen) Mengen **J1 = {¬, ...}, J2 = {∨, ∧ , ...}** von Zeichen, genannt **Junktoren**. Die Zeichen von **J1** nennen wir „**1-stellige Junktoren**“, die von **J2** „**2-stellige Junktoren**“. Die Punkte „**...**“ in den Mengenangaben sollen andeuten, dass **J1** bzw. **J2** bei Bedarf noch mehr als die angegebenen Junktorenzeichen enthalten dürfen. Die Zeichen **¬, ∨ , ∧** sind sprachlich meist zu lesen wie „nicht ...“, „ ... oder ...“, „... und ...“.

(3) Dem Klammerpaar (,) als Trennzeichen gegenüber den EA-Zeichen und den Junktoren.

(4) Alle vier Zeichenmengen **E, J1, J2, {(,)}** seien paarweise fremd zueinander. Die Menge **Z:=E∪J1∪J2∪{(,)}** bildet das **Alphabet** der Sprache einer Aussagenlogik.[10]

Die Junktoren aus **J1** dienen als Vorschaltzeichen vor EA-Zeichen, die Junktoren aus **J2** dienen als Verbindungszeichen zwischen zwei EA-Zeichen. Die EA-Zeichen sollen mit Hilfe der Junktoren und der Klammern zu weiteren sogenannten „**Aussagesymbolen**“ (man sagt auch „Formeln“), notiert als Großbuchstaben A,...,F, G,..., zusammengesetzt werden.

Beispiel klassische Logik: In der klassischen 2-wertigen Logik kommt man mit **J1={¬}, J2={∨}** aus, also insgesamt mit nur zwei Basisjunktoren.

¬A ist zu lesen wie „nicht A“ (Verneinung), der Junktor ¬ heißt auch „Negation“
A∨B ist zu lesen wie „A oder B (oder beides)“ (also ∨ ist zu lesen wie das nicht-ausschließende „oder“, lat. „vel“), der Junktor ∨ heißt auch „**Disjunktion**“,
A∧B :=¬(¬A∨¬B) wird als „Abkürzung“ eingeführt, zu lesen wie „A und (zugleich) B“, der Junktor ∧ heißt auch „**Konjunktion**“
A⇒B := ¬A∨B wird als „Abkürzung“ eingeführt, zu lesen wie „wenn A, dann B“ (oder „aus A folgt B“, oder „A ist hinreichend für B“ oder „B ist notwendig für A“), der Junktor ⇒ heißt auch „Implikation“,
A⇔B := (A⇒B)∧(B⇒A) = (¬A∨B)∧(¬B∨A) wird als „Abkürzung“ eingeführt, zu lesen wie „A genau dann, wenn B“

---

sich um 3mal das Zeichen * oder erst *, dann ** oder erst **, dann * handelt. Mit der Zeichenmenge {0, 1} jedoch kommt man im Prinzip für fast jedes Vorhaben aus!

[8] Mit „abzählbar“ meinen wir immer „abzählbar-unendlich“, d.h. eine „abzählbarere“ Menge hat die Mächtigkeit der Menge **N** der natürlichen Zahlen.

[9] Wir bleiben bei der Bezeichnung „EA-Zeichen“ für die Elemente der Menge **E** und benutzen hier nicht die Bezeichnung „Aussagen*variable*“, weil wir das Wort „*Variable*“ erst in der **metasprachlichen** Definition (2.1.5) des Begriffs „Aussageform“ benutzen.

[10] *Gottwald*, [Go.1989, S.12], fügt dem Alphabet der formalen Sprache noch eine Menge von „Konstanten zur Bezeichnung bestimmter Quasiwahrheitswerte“ hinzu. Das machen wir hier nicht, denn es vermischt den Bereich des Syntax-Schemas mit dem des Semantik-Schemas und trägt dazu bei, die Begriffe der „Junktorenabbildung“ und der „Belegung“ unnötig zu verkomplizieren; wie man in [Go.1989, S.15] sehen kann.

(oder „A dann und nur dann, wenn B“ oder „A ist notwendig und hinreichend für B“ oder „A ist logisch äquivalent zu B“), der Junktor ⇔ heißt auch „(logische) Äquivalenz“.

Die Symbolik und Sprechweise für diese speziellen Junktoren-Zeichen wird meist auch in anderen Logiken übernommen, die wir hier untersuchen. Allerdings kann in unterschiedlichen Logiken ¬ eine andere als die klassische Bedeutung bekommen, und ⇒ muss nicht immer wie oben aus ¬ und ∨ abgeleitet sein, sondern kann ein eigenständiger Junktor sein. Wir beschränken uns daher zunächst absichtlich nicht auf diese klassischen Basis-Junktoren-Zeichen, sondern schreiben **ν** für einen beliebigen 1-stelligen bzw. **φ** für einen beliebigen 2-stelligen Junktor, zumal in einigen nicht-klassischen Fällen auch noch weitere Junktoren hinzukommen mögen. Welche der Junktoren von **J1∪J2** „Basisjunktoren“ seien, welche aus den Basisjunktoren abgeleitet bzw. als „Abkürzung“ eingeführt werden, lassen wir zunächst offen. Erst im „Semantik-Schema“, betrachten wir dazu einige Möglichkeiten.

Aus dem Alphabet **Z** definieren wir nun ***induktiv*** *(rekursiv)* [11] eine formale „Sprache“ **P** (ein Sprachschema).

(2.1.2) DEF.Sprache P: Induktiver Aufbau der Menge **P** aller „**Aussagesymbole**“[12]:

(1) [Schritt 1:] **Jedes EA-Zeichen ist ein Aussagesymbol.**

[Schritt 2:] Seien ν∈**J1** und φ∈**J2** beliebige 1- bzw. 2-stellige Junktoren:
- sind a, b∈**E** EA-Zeichen, so ist (a φ b) ein Aussagesymbol;
- ist a ein EA-Zeichen, so ist νa ein Aussagesymbol**.**

(2) [Schritt k:] **Seien ν∈J1 und φ∈J2:**

(2.1) sind F, G Aussagesymbole, so auch (FφG);
[insbesondere sind dann auch (F∨G), (F∧G), (F⇒G) Aussagesymbole]

(2.2) ist F ein Aussagesymbol, so auch νF;
[insbesondere ist dann auch ¬F ein Aussagesymbol]

(3) Außer diesen gelten keine weiteren mit **Z** gebildeten Zeichenreihen als Aussagesymbole.

Beispiel und Klammersetzung: Sind A, B, C Aussagesymbole, so darf man gemäß dem induktiven Aufbau (2.1.2) daraus z.B. das folgende Aussagesymbol bilden:

(i) (((¬A∨B)∧¬(A∧C))∨((C∧¬B)∨A)).

Am Beispiel sieht man, warum in der Regel (2.1.2)(2.1) die **Klammerpaare** wichtig sind: Bei Kombination eines Aussagesymbols mit einem 1-stelligen Junktor sind keine Klammern erforderlich. Der 1-stellige Junktor soll an das nachfolgende Zeichen stärker „binden“ als an das vorangehende Zeichen. (Weitere Klammern sparende „Bindungsregeln“ wollen wir nicht einführen; sie sind von Buch zu Buch auch verschieden vereinbart.) Klammern braucht man nur zur Abgrenzung bei Kombination mit einem 2-stelligen Junktor, denn für diese Kombination haben wir die sog. „**Infix-Schreibweise**“ XφY festgesetzt. Hätten wir statt dessen die sog. „**Präfix-Schreibweise**“ („polnische“ Schreibweise) φXY gewählt, so wären auch hier Klammern nicht nötig. Das obige Beispiel lautet in „**polnischer**“ Schreibweise:

(ii) ∨∧∨¬AB∧AC∨∧C¬BA

Das gibt zwar den Ausdruck (i) korrekt wieder und benötigt überhaupt keine Klammern, erscheint aber den meisten Leuten sehr unübersichtlich und stark gewöhnungsbedürftig. Daher benutzen wir lieber die **Infix-Schreibweise** und nehmen damit die Notwendigkeit der **Klammern** in Kauf.

Gegenbeispiele: Sind A, B, C Aussagesymbole, so sind

((¬A∨B)∧¬(A∧C))∨((C∧¬B∨A)),
(((¬A∨B)¬ ∧(A∧C))∨((C∧∧¬B)∨AB))

keine Aussagesymbole. Im ersten Gegenbeispiel fehlen Klammern, im zweiten sind ∧∧ und AB unzulässige Teilstrings.

Um Klammern zu sparen, setzt man fest: Das äußerste Klammernpaar eines Aussagesymbols darf man weglassen, wenn es (in einer Metabeschreibung) allein steht, also nicht eingebettet ist in ein anderes Aussagesymbol.

---

11 “**Induktiv**“ (oder „rekursiv“) heißt: wir benutzen eine Grundeigenschaft der Menge **N** der natürlichen Zahlen, die da lautet:
Sei f(n) eine für beliebige Nummern n=1, 2, 3, ...∈**N** formulierbare Regel.
(a) Gilt die Regel für n=1, also trifft f(1) zu, und
(b) folgt für beliebiges k∈**N** aus der Annahme, dass f(k) gelte, dass dann auch f(k+1) gelte,
so folgt aus (a) und (b): Die Regel f(n) gilt für *alle* n∈**N**.
Die Methode der induktiven Definition spielt in der Logik eine große Rolle und wird auch in dieser Note immer wieder angewendet.

12 Statt „Aussagesymbol“ (von **P**) sagt man auch einfach „Formel“ (von **P**)

Beispiel: Sind a,b,c∈**E,** so ist zum Beispiel F:= (¬(a∧¬b)∧(c∨¬c)) ein Aussagesymbol, das wir als ¬(a∧¬b)∧(c∨¬c) notieren dürfen, wenn F es (in einer Metabeschreibung) allein steht. (Wir dürfen es, im Fall der klassischen Logik, **aber nur in dieser(!)**, auch einfach als „a⇒b" notieren. Warum? – Das mache man sich als „Übung" klar.)

Zu beachten: In der Notationsweise „F:= (¬(a∧¬b)∧(c∨¬c))" soll der rechte Teil (¬(a∧¬b)∧(c∨¬c)) eine Zeichenreihe von **P** sein. Mit „F:=" teilen wir nur mit, dass wir F als eine Abkürzung für (¬(a∧¬b)∧(c∨¬c)) benutzen. Das Zeichen F selbst soll also **nicht** eigentlich zu **P** gehören, auch nicht das Zuweisungszeichen := . Wenn wir dennoch „F ∈ **P**" schreiben, teilen wir mit, dass der durch F repräsentierte String (¬(a∧¬b)∧(c∨¬c)) ein Symbol der Menge **P** sei. „F ∈ **P**" ist also eine **metasprachliche** Notierung.

Ein Aussagesymbol (eine „Formel") F, das selbst kein EA-Zeichen ist, heiße „**zusammengesetzt**". Wir wollen kurz erläutern, was unter einer „Teilformel" zu verstehen ist.

(2.1.3) DEF.Teilformel: Sei F ein zusammengesetztes Aussagesymbol; F ist also ein String $z_1z_2...z_n$, dessen Zeichenreihenfolge durch die Indexanordnung 1<2<...<n gegeben ist. Ist $1 \leq k<k+1<...<k+r \leq n$, so ist G:= $z_kz_{k+1}...z_{k+r}$ ein Teilstring von F. G heiße **Teilformel** von F, wenn G ein Aussagesymbol gemäß DEF.(2.1.2) ist.

Beispiel: Sei F:= ((a∨b)∧(¬(a∧c)∨(¬b∧¬a)∨¬c)) . F ist offensichtlich ein Aussagesymbol. G_1:= (a∨b), G_2:= (¬b∧¬a), G_3:= (¬b∧¬a)∨¬c) sind Teilformeln von F. G_4:= (a∨b)∧(¬(a∧c) ist zwar ein Teilstring aber *keine* Teilformel von F.

Die Menge **P** wird, wie man sagt, nach der Methode (2.1.2) aus dem Alphabet **Z := E∪J1∪J2∪{(,)}** „*erzeugt*", das Erzeugnis notieren wir daher auch als **P = [E; J1, J2].**

Die Elemente der formalen „Sprache" **P** sind zunächst nichts anderes als (von links nach rechts geordnete) **endliche Zeichenreihen** („*Strings*"). Der Umgang mit Aussagesymbolen ist also zunächst nichts anderes als „*inhaltsloses string management*".

Man müsste bei **P** eigentlich immer von formaler ***Schrift*** (satt von „Sprache") reden, denn mit lautlichen Äußerungen einer *gesprochenen* Sprache hat **P** nichts zu tun. Daher sind die (nicht zu **P** gehörigen!) *Lesarten* – etwa „und", „oder", „wenn ...so ..." usw. für die Junktoren, (und später in der Prädikatenlogik, auch für die so genannten Quantoren, etwa „es gibt...", „für alle ...") – stets nur im gesamten Kontext der formallogischen Zeichenstruktur zu verstehen.

Wir **vermeiden** es, die Zeichen ¬, ∨, ∧, ⇒ auch in der Metasprache bzw. der 2-wertigen Metalogik zu benutzen, sondern sie sollen nur in der Objektsprache **P** bzw. der Objektlogik verwendet werden.

2.2.3 Zusatzbemerkungen über die Sprache P

2.2.3.1 Wie viele Elemente hat die Sprache P?

(2.2.1) Satz: P ist abzählbar.

Beweis (durch „*Gödelisierung*")**:** Die Zeichenmenge **Z=J1∪J2∪{(,)}∪E** ist endlich bzw. abzählbar, je nachdem die EA-Zeichenmenge **E** endlich bzw. abzählbar ist. Jedes Aussagesymbol A∈**P** ist ein nach dem o.a. induktiven Verfahren (2.1.2) aus **Z** erzeugter endlicher String $z_1z_2....z_n$. Wir betrachten die unendliche *String*-Menge

$ZR:=\{z_1z_2....z_n \mid z_i \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$.

Klar, dass **P** wegen der besonderen Konstruktionsmethode (2.1.2) zwar unendlich, aber nur eine echte Teilmenge von ZR ist: **P**⊂ZR. Da **Z** höchstens abzählbar ist, kann man die Zeichen von **Z** (in willkürlicher Weise) nummerieren und erhält so eine **injektive** Abbildung

$\gamma: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$

Nun konstruieren wir eine injektive Abbildung β: ZR→**N** („*Gödelisierung*" der Menge ZR). Ist p_1, p_2, p_3, p_4, p_5,... die aufsteigende Folge der Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11,...), so sei für jeden String $\underline{s}= z_1z_2...z_n \in ZR$

$\delta(\underline{s}) := p_1^{\gamma z1}.p_2^{\gamma z2}. ... .p_n^{\gamma zn} \in \mathbf{N}.$

Die Menge δ(ZR) ist also eine gewisse unendliche Teilmenge von **N,** also abzählbar**.** Wegen des Satzes über die eindeutige Faktorzerlegung natürlicher Zahlen in Primzahlpotenzen und wegen der Umkehrbarkeit der Abbildung γ lässt sich umgekehrt eine beliebige gegebene Zahl m∈**δ**(ZR) auf eine eindeutige Zeichenreihe $y_1y_2...y_n$ ($y_i \in \mathbf{Z}$) zurückführen, nur dass $y_1y_2...y_n$ – wegen der besonderen Konstruktionsmethode für **P** aus **Z** – nicht in jedem Falle auch ein *Aussagensymbol* A∈**P** ergibt. δ ist also *injektiv;* wegen **P**⊂ZR ist dann auch die Beschränkung $\delta_{|\mathbf{P}}$ von δ auf **P** *injektiv*; und das besagt, dass **P abzählbar** ist; und dies gilt sogar unabhängig davon, ob die Menge **E** der EA-Zeichen *endlich* oder *abzählbar* ist.

Beispiel: Sei **E**={a, b, c, d,...}, **J1**={¬}, **J2**={∨,∧}.
Nummerierung: ( ) ¬ ∨ ∧ a b c d ...
$\to_\gamma$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ... .
Sei z.B. $\underline{s}$:= (¬(a∧¬b)∨(c∨¬c)) $\underline{s}$ ist hier sogar ein Aussagesymbol.
$\delta(\underline{s}) = 2^1.3^3.5^1.7^6.11^5.13^3.17^7.19^2.23^4.29^1.31^8.37^4.41^3.43^8.47^2.53^2$; das gibt eine riesige Zahl $\delta(\underline{s})$ = 12.541.504.162.977 (größer als zwölftausend Milliarden).
Ist umgekehrt die Zahl $\delta(\underline{s})$ = 12.541.504.162.977 gegeben, so gewinnt man wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlpotenzen mit einer Fleißrechnung (oder mit Hilfe des Computers) die Darstellung dieser Zahl als Primzahlpotenzenprodukt zurück. Ordnet man im Produkt die Potenzen nach *aufsteigenden Primzahlbasen*, so liest man aus der Folge der Exponenten ^{1} ^{3} ^{1} ^{6} ^{5} ^{3} ^{7} ... mit Hilfe der inversen Abbildung γ^{-1} die endliche Zeichenfolge des Strings $\underline{s}$ ab (und kann nun an Hand der Struktur von $\underline{s}$ entscheiden, ob $\underline{s}$ ein Aussagensymbol ist oder nicht).

2.2.3.2 Die „Tupel-Schreibweise“ für zusammengesetzte Aussagesymbole

Die Tupel-Schreibweise ist eine **metasprachliche** aus Aussagesymbolen erstellte Notation, die manchmal nützlich ist. Wir erläutern sie für ein Aussagesymbol A an folgendem Beispiel:

A := (a∨b)∧(¬(a∧c)∨(¬b∧¬a)∨¬c) ,

wobei a, b, c untereinander verschiedene EA-Zeichen seien.(Das äußere Klammerpaar ist bei A weggelassen, da A alleinstehend betrachtet wird). Im von links nach rechts gelesenen String A kommen folgende EA-Zeichen der Reihe nach vor:

a b a c b a c

Bezeichnet $\alpha_{a.A}$ die aus Junktoren und Klammern gebildete Struktur von A, so können wir A durch den Ausdruck

$\alpha_{a.A}$(a, b, a, c, b, a, c)

symbolisieren und nennen diese Darstellung von A die **„allgemeine Darstellung“**. In ihr werden die eventuellen Wiederholungen der in A vorkommenden EA-Zeichen berücksichtigt. Wollen wir nur darstellen, welche *untereinander verschiedenen* EA-Zeichen in A der Reihe nach *erstmalig* vorkommen, so schreiben wir für A das Symbol

$\alpha_{r.A}$(a, b, c)

und nennen diese Darstellung von A die **„reduzierte Darstellung“**. Zusammen haben wir also

A = $\alpha_{a.A}$(a, b, a, c, b, a, c) = $\alpha_{r.A}$(a, b, c)

Die Anzahl 3 der Menge {a, b, c} nennen wir die (reduzierte) **Stelligkeit** des Aussagesymbols A. Klar, dass dann die Ausdrücke $\alpha_{r.A}$(a, b, c) von $\alpha_{r.A}$(b, a, c), $\alpha_{r.A}$(a, a, c) usw... von einander zu unterscheiden sind.

Gebrauch von Aussageformen: Seien a, b, c ∈ **E**. Mit der Setzung „F := $\alpha_{r.F}$(a, b, c)“ oder auch „F := $\alpha_{a.F}$(a, b, c)“ meinen wir also nichts anderes als, dass F ein gewisses Aussagesymbol sei, das aus den EA-Zeichen a, b, c gemäß Def.(2.1.2) zusammengesetzt ist.

2.2.3.3 Variablen und Aussageformen

Auch die folgenden Notationen sind **metasprachlicher** Natur: Mit x, y, u, ... oder x_1,x_2, ... oder y_1, y_2,... oder u_1, u_2, ... bezeichnen wir so genannte **Platzhalter** oder **Variable**. Solche Platzhalter sind als ***nicht*** zur Zeichenmenge **Z=E∪J1∪J2∪{(,)}** gehörige neue Zeichen anzusehen. Sie sollen aber *an Stelle von EA-Zeichen* eingesetzt werden dürfen.

Gegeben sei ein Aussagesymbol A=z_1 z_2 ...$z_{L(A)}$, L(A) sei die Länge des Strings A. Wir betrachten die „reduzierte Darstellung“, A=$\alpha_{r.A}(a_1,..,a_n)$ (es ist n≤L(A)), in der also die a_i, a_k für i≠k verschiedene EA-Zeichen sind. Ersetzt man an jeder Stelle k∈{1,...,n} das a_k überall, wo es im String A vorkommt, durch die Variable x_k , so bekommt man aus A eine Form $\alpha_{r.A}(x_1,...,x_n)$ die nur noch aus Klammerpaaren, Junktoren und Platzhaltern x_i besteht. Die Zeichen x_i, x_k seien für i≠k ebenfalls verschieden. $\alpha_{r.A}(x_1,...,x_n)$ ist ***kein*** Aussagesymbol ∈**P** mehr, sondern man nennt $\alpha_{r.A}(x_1,...,x_n)$ eine (aus A erstellte) **„n-stellige Aussageform“.** Ersetzt man umgekehrt an jeder Stelle k die Variable x_k durch je ein bestimmtes b_k∈**E**, so bekommt man aus $\alpha_{r.A}$ wieder ein Aussagesymbol B := $\alpha_{r.A}(b_1,..., b_n)$∈**P.** $\alpha_{r.A}$ ist also eine **n-stellige Abbildung** (oder n-stellige **Aussagefunktion**)

$$\alpha_{r.A}\colon \mathbf{E}^n \to \mathbf{P}.$$ (**E**^{n} ist Abkürzung für das n-fache kartesische Produkt **E**x...x**E**)**.**

$\alpha_{r.A}$ nennen wir **in Reinform,** weil der Ausdruck $\alpha_{r.A}(x_1,...,x_n)$ keine EA-Zeichen enthält. n heißt die **Stelligkeit** von $\alpha_{r.A}$.

Zu gegebener Aussagefunktion $\alpha_{r.A}(x_1, x_2,..., x_n)$ in Reinform und in reduzierter Darstellung kann man weitere Aussagefunktionen herstellen**,** indem man

(i) dieselbe Variable an verschiedenen Stellen einsetzt: Zum Beispiel ist $\alpha'(x,x_3,..,x_n) := \alpha_{r.A}(x, x, x_3,..., x_n)$ eine (n-1)-stellige Aussageform, wobei die Darstellung links in reduzierter, die rechts in allgemeiner Reinform ist; oder

(ii) indem man nur einen Teil der Variablen durch EA-Zeichen ersetzt. Zum Beispiel ist $\alpha''(x_2,..,x_n) := \alpha_{a.A}(a_1,x_2,...,x_n)$ eine (n-1)-stellige und $\alpha'''(x_1,x_2) := \alpha_{a.A}(x_1,x_2, a_3,...,a_n)$ eine 2-stellige Aussagefunktion usw.... α'', α''' sind nicht mehr in Reinform, weil ihre Strings außer den Variablen noch EA-Zeichen enthalten.

Beispiele: x, y seien verschiedene Variablen, a sei ein EA-Zeichen.

α(x, x) := x∧¬x ist eine 1-stellige (!) Aussagefunktion in Reinform und in allgemeiner Darstellung.
α'(x) := x∧¬x ist dieselbe 1-stellige Aussagefunktion in Reinform und in reduzierter Darstellung.
α''(x, y) := x∧¬y ist eine 2-stellige Aussagefunktion in Reinform und in reduzierter Darstellung
α'''(x) := x∧¬a ist eine 1-stellige Aussagefunktion die **nicht** in Reinform ist (denn a∈**E**).

Mit einer kleinen Fleißarbeit beweist man den

(2.2.5) Substitutionssatz: Sei $\alpha(x_1,...,x_n)$ eine n-stellige, $\beta(y_1,...,y_m)$ eine m-stellige Aussageform. Ersetzt man an irgendeiner Stelle $i\in\{1,...,n\}$ von α die Variable x_i durch $\beta(y_1,...,y_m)$, so bekommt man mit $\alpha(x_1,...x_{i-1}, \beta(y_1,...,y_m), x_{i+1},...,x_n)$ nach Umbenennung der Variablen eine (n+m)-stellige Aussageform $\gamma(u_1,...,u_{n+m})$: $\mathbf{E}^{n+m} \to \mathbf{P}$.

2.2.3.4 Wie viele n-stellige Aussageformen gibt es über E?

Die Menge aller **n**-stelligen aus **J1, J2, E** bildbaren Aussageformen sei mit

. Funk(**J1, J2**; $\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$)

bezeichnet., wobei $\mathbf{J1}\cup\mathbf{J2}$ die Menge der Junktoren auf **P** ist. Die Menge *aller* aus **J1, J2, E** bildbaren Aussageformen ist dann

Funk(**J1,J2, E**) = $\mathbf{U}_{n\in\mathbf{N}}$ Funk(**J1,J2**; $\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$).

Die Mengen **J1, J2** werden in diesen Bezeichnungen deshalb erwähnt, weil die betrachteten Aussageformen ja aus diesen und keinen weiteren Junktoren erzeugt sein sollen.

Sei $n\in\mathbf{N}$ fest gewählt. Der Begriff „n-stellige Aussageform" („Aussagefunktion") ist wohl zu unterscheiden sowohl vom Begriff „Aussagesymbol", in dem EA-Zeichen an n Stellen vorkommen, als auch vom Begriff einer *allgemeinen* Abbildung $\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$!
Ist A ein Aussagesymbol so gewinnt man aus A genau eine Aussageform α in Reinform (und allgemeiner oder auch reduzierter Darstellung). Ist umgekehrt α eine Aussageform in Reinform, so erzeugt sie **viele** Aussagesymbole durch Ersetzen der Platzhalter durch EA-Zeichen. Sei $\mathbf{P}_n$ die Menge aller n-stelligen Aussagesymbole, sie ist eine echte Teilmenge von **P**. Es gibt also eine Abbildung $\mathbf{P}_n \to$Funk(**J1,J2**; $\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$), die nur injektiv ist. Da **P** abzählbar ist, ist auch Funk(**J1,J2, E**$^n\to$**P**) abzählbar. **Es gibt also nur abzählbar viele n-stellige Aussageformen**. Andererseits ist die Menge ***aller*** Abbildungen $\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$ größer: Sind $|\mathbf{E}^n|$ bzw. $|\mathbf{P}|$ die Mächtigkeiten der Mengen $\mathbf{E}^n$ bzw. **P**, so ist die Mächtigkeit der Menge $\mathbf{P}^{\mathbf{E}n}$ ***aller*** Abbildungen α: $\mathbf{E}^n \to\mathbf{P}$ gleich $|\mathbf{P}|^{|\mathbf{E}n|}$. Ist **E** endlich, so auch $\mathbf{E}^n$; da **P** abzählbar ist, ist dann auch $\mathbf{P}^{\mathbf{E}n}$ abzählbar. Ist aber **E** abzählbar, so auch $\mathbf{E}^n$; aber dann ist $\mathbf{P}^{\mathbf{E}n}$ ***überabzählbar***. Es gibt also i.allg. „wesentlich mehr" Abbildungen $\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$ als Aussagesymbole oder Aussageformen!

2.2.4 Beachte: Was zur Objektsprache P gehört, was nicht

Welche „Strings" zur formalen Sprache **P** gehören, wurde in der induktiven Definition (2.1.2) erklärt. Die im vorigen § eingeführten Platzhalter (Variablen) gehören, wie betont, nicht zu **P**, daher gehören auch Aussageformen α:$\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$ nicht zu **P**. Wir werden sie daher auch nur gelegentlich benutzen. Auch das Mengenzeichen **P** selbst gehört nicht zur Sprache **P**. Ebenso sind die Element-Mengen-Relation $\in$ sowie irgendwelche Bezeichnungen von Teilmengen von **P** keine Objekte in **P:** Ist etwa $M\subseteq\mathbf{P}$, so ist weder „$\subseteq$" noch „M" ein zur Sprache **P** zählendes Objekt. Schreiben wir z.B.

A:= $((a\wedge b)\Rightarrow c)$ (mit EA-Zeichen a, b, c)

so gehört zwar die rechte Seite zu **P**, aber streng genommen nicht die linke. A ist nur eine „Abkürzung" für die rechte Seite: Weder das definierende Zeichen „:=" noch die Abkürzung A sind Elemente der formalen Sprache **P. Wenn wir trotzdem „A∈P" schreiben, meinen wir damit, dass der durch A repräsentierte, aus Zeichen von Z=E∪J1∪J2∪{(,)} gebildete String** $((a\wedge b)\Rightarrow c)$ **zu P gehört.** Alle diese nicht zu **P** gehörenden Dinge gehören zur „**Metasprache**", in der wir **P** definiert und beschrieben haben.

2.3 Semantik-Schema

2.3.1 Vorbemerkung

Um aus der formalen Sprache **P=[E; J1, J2]** eine wertebasierte „Aussagenlogik" zu machen, braucht man einen **Bewertungsbereich B**. Wir wollen uns stets auf einen **endlichen** Bewertungsbereich beschränken. In der klassischen Aussagenlogik ist {0, 1}[13] der Bewertungsbereich. (Statt mit 1 / 0 bezeichnet man die Werte auch als „wahr" / „falsch" oder als „zutreffend" / „unzutreffend" oder „erwünscht" / „unerwünscht". Da aber in diesen verbalen Bezeichnungen bereits eine spezielle, jedoch mathematisch nicht präzisierte „Deutung" drin steckt, die aus einer Metaebene stammt, welche *über* derjenigen liegt, der die „mathematisch angereicherte Umgangssprache" angehört, mit der das Syntax- und Semantik-Schema einer „Logik" zu beschreiben ist, nimmt man kürzer die Zeichen 1 / 0.)

P ist so zu sagen ein „ausreichender Vorrat", aus dem man Teilmengen von Aussagesymbolen (meist sogar nur endlich viele) in bestimmten Anwendungen „deutet". Unter einer „Deutung" muss man sich folgendes vorstellen: Sie besteht aus einem Tripel (δ, γ, β) von Abbildungen: Ist M eine Menge von EA-Zeichen , $M\subseteq\mathbf{E}$, so „deutet" δ:M$\to$T die EA-Zeichen von M als Elementaraussagen (zum Beispiel als die „Axiome") einer Menge T von Aussagen („Sätzen"), welche aus einer bekannten „Theorie" oder einem „Fachgebiet" stammen. Die „Deutung" δ, d.h. das eigentlich

[13] Wenn wir die Zeichen 0 und 1 als Elemente eines Bewertungsbereichs nennen, soll das nichts zu tun haben mit den natürlichen Zahlen 0 und 1.

„Inhaltliche", wird im formalen Semantik-Schema der Aussagenlogik **gar nicht erwähnt**, weil das die einfache formale Struktur der aussagenlogischen Sprache gar nicht hergibt; dazu müsste man die EA-Zeichen weiter strukturieren (etwa, wie es in der Prädikatenlogik geschieht). Es ist besser, die Abbildung δ auf einer Metaebene anzusiedeln, welche *über* der Sprachebene liegt, in der das zu definierende Syntax- und Semantik-Schema der Aussagenlogik beschrieben wird. Als „Deutung" gilt daher nur das Paar (γ, $\beta°$): Die *bijektive* Abbildung γ:**J1$\cup$J2 $\rightarrow$ V1$\cup$V2,** die sog. **„Junktorenabbildung"** ordnet jedem 1- bzw. 2-stelligen Junktor $\nu\in$**J1** bzw. $\varphi\in$**J2** je genau eine 1- bzw. 2-stellige **algebraische Verknüpfung** $\gamma\nu\in$**V1** bzw. $\gamma\varphi\in$**V2** einer gegebenen (zu T „passenden") **endlichen[14] algebraischen Struktur (B**, **V1, V2)** zu. **B** heiße der „**Bewertungsbereich**". Die Verknüpfungen der Menge **V=V1$\cup$V2** nennen wir auch die **Basisverknüpfungen** der algebraischen Struktur **B**, um sie von allgemeineren Abbildungen $\mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ zu unterscheiden.

Insbesondere sollen die den Junktoren $\vee$, $\wedge$ $\in$**J2** entsprechenden Verknüpfungen des Bewertungsbereichs **B** die festen Bezeichnungen **+**, $\bullet$ haben:

$\gamma\vee = +$, $\gamma\wedge = \bullet$

Eine Abbildung $\beta°$:M $\rightarrow$**B, „belegt" („bewertet")** jedes EA-Zeichen von M mit je genau einen „logischen Wert" aus dem Bewertungsbereich **B;** $\beta°$ nennt man daher auch eine „**Elementarbelegung**". Es sollen aber nicht nur die Junktoren und die EA-Zeichen von M$\subseteq$ **E** „gedeutet" werden, sondern beliebige Aussagesymbole aus der Teilsprache P(M):=**[M; J1, J2].** Dazu erweitert man eine Elementarbelegung $\beta°$:M $\rightarrow$**B** nach der *induktiven* Methode zu einer „**Belegung**" β:P(M)$\rightarrow$**B**. Wir legen das in den folgenden formalen Definitionen nieder.

2.3.2 Definition von „Deutung" und „Belegung"

(2.3.1) DEF.Deutung: Sei **P=[E,J1,J2]** eine formale Sprache.
(i) Eine **endliche, mindestens 2-elementige** Menge **B** mit einer algebraischen Struktur **(B,V1,V2)** heißt zu **P** „passend", wenn es eine *bijektive* Abbildung

. γ: **J1$\cup$J2 $\rightarrow$ V1$\cup$V2**

– genannt: „**Junktorenabbildung**" – gibt, die jedem 1-stelligen Junktor $\nu\in$**J1** eine einstellige Verknüpfung $\gamma\nu$ $\in$**V1** und jedem 2-stelligen Junktor $\varphi\in$**J2** eine 2-stellige Verknüpfung $\gamma\varphi\in$**V2** zuordnet. Das Tripel **(P,B,γ)** heiße eine „**Aussagenlogik**". Die endliche Menge **B** heiße der **Bewertungsbereich** der Logik.
(ii) Sei A$\in$**P** ein Aussagesymbol, und sei E(A) die Menge der in A vorkommenden EA-Zeichen. Eine Abbildung

$\beta°$: E(A) $\rightarrow$**B**

heiße eine **Elementarbelegung** von A.
(iii) Sei Σ $\subseteq$ **P** eine Menge von Aussagesymbolen, und sei E(Σ) die Menge der in den Aussagesymbolen von Σ vorkommenden EA-Zeichen. Eine Abbildung

$\beta°$: E(Σ) $\rightarrow$**B**

heiße eine **Elementarbelegung** von Σ.

---

[14] Wir wollen uns nur auf **endliche** Bewertungsbereiche beschränken. Natürlich hat man auch mehrwertige Logiken mit unendlichem Bewertungsbereich untersucht; ein Beispiel dafür ist die sogenannte Fuzzylogik: Der Wertebereich ist das reelle Interwall [0, 1].

(iv) Das Paar (γ, β°) heiße eine **Deutung** der EA-Zeichen des Aussagesymbols A bzw. der Menge Σ von Aussagesymbolen.

Es sollen aber nicht nur EA-Zeichen, sondern auch die Aussagesymbole „gedeutet" (bewertet) werden können, so dass die Struktur der Sprache **P** zur algebraischen Struktur des Bewertungsbereichs **B** „passt". Dazu definieren wir induktiv (rekursiv), was wir unter der zu einer Elementarbelegung β° gehörigen **Belegung** β verstehen wollen.

(2.3.2) DEF.Belegung: Sei M ⊆ **E** eine Menge von EA-Zeichen, P(M)=[M, **J1, J2**] die aus M erzeugte Teilmenge von Aussagesymbolen, und β°:M →**B** eine Elementarbelegung. Die Abbildung β heißt die aus der Elementarbelegung β° ***abgeleitete*** **Belegung**, wenn gesetzt wird:

(1) [Schritt 1:] β(a):=β°(a) für alle EA-Zeichen a ∈ **M**

[Schritt 2:] Sind a,b∈**M** und ν∈**J1**, φ∈**J2**, also γν∈**V1**, γφ∈**V2**,so sei β(νa):= γν(β°(a)) und β(aφb) := β°(a) γφ β°(b) für alle a,b∈**M**

(2) [Schritt k:] Sind F, G schon gebildete Aussagesymbole aus P(M) und ν∈ **J1**, φ∈ **J2**, also γν∈ **V1**, γφ∈ **V2**, so sei
β(νF) := γν(β(F)) und β(FφG) := β(F) γφ β(G).
[also insbesondere: β(E∨F) := β(E)+β(F), β(E∧F) := β(E)•β(F)]

(3) Mit (1) und (2) ist die Belegung β – gemäß der induktiven Methode – für *alle* zu deutenden Aussagesymbole definiert.

Auch das Paar (γ, β) nennen wir eine **Deutung** der Menge Σ=P(M).

2.3.3 Beispiel klassische Logik

In der klassischen 2-wertigen Logik mit dem 1-stelligen Junktor ¬ und den 2-stelligen Junktoren ∧, ∨ ist der Bewertungsbereich **B** die Menge {0, 1} (0 zu lesen wie „falsch", 1 zu lesen wie „wahr"). Die induktive Erweiterung (2.3.2) einer Belegung β° auf die abgeleitete Belegung β wird dann meist so formuliert, vgl. etwa [Kr/Kü.2006, S.21f]:

DEF. „Belegung" bei klassischer Logik:

(1) [Schritt 1:] β(a):=β°(a) für alle EA-Zeichen a ∈**M**

(2) [Schritt k:] Sind E,F∈ P(M), so sei

β(¬E)	:= 1	für β(E)=0
	:= 0	sonst.
β(E∨F)	:= 1	wenn wenigstens eines der beiden Aussagesymbole den Wert 1 bekommt.
	:= 0	sonst
β(E∧F)	:= 1	falls β(E)=β(F)=1
	:= 0	sonst

(3) Mit (1) und (2) ist die Belegung β – gemäß der induktiven Methode – für *alle* zu deutenden Aussagesymbole der aus der EA-Zeichenmenge M erzeugten Menge P(M) definiert.

Macht man **B**={0,1} zu einem **Booleschen Verband** ({0,1},*, +, •) (dem einfachsten, den es gibt), durch die Definitionen
1* =0, 0* =1, 1+1=1+0=0+1=1, 0+0=0, 1•1=1, 1•0=0•1=0•0=0,

so geht die Klausel (2) über in die äquivalente Klausel:

(2) [Schritt k:] Sind E,F∈ P(M), so sei
β(¬E) := (β(E))*
β(E∨F) := β(E)+β(F)
β(E∧F) := β(E)•β(F)

Und das entspricht genau der Klausel (2) im der allgemeinen Def.**(2.3.2)**. In der klassischen Logik führt also die bijektive Abbildung γ: J1∪J2 → V1∪V1 die Junktoren ¬ („nicht..."), ∧ („...und..."), ∨ („...oder...") über in die Operatoren * (Involution auf {0. 1} mit x*≠x, x**=x), die boolesche Infimumbildung • und die boolesche Supremumbildung +.

2.3.4 Grundsatz der mehrwertigen Aussagenlogik

Die allgemeine Klausel (2) in der Def. (2.3.2) besagt das sogenannte „***Extensionalitätsprinzip***", d.h. der logische Wert jedes zusammengesetzten Aussagesymbols $A\in \mathbf{P}$ ergibt sich allein aus den logischen Werten der EA-Zeichen, aus denen A zusammengesetzt ist.[15]

Als Konsequenz des Extensionalitätsprinzips ergibt sich der

(2.3.4) Homomorphiesatz: Sei $n\in \mathbf{N}$ beliebig. Zu jeder n-stelligen Aussageform $\alpha:\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$ in **Reinform** (in allgemeiner oder auch reduzierter Darstellung) gibt es eine algebraische Funktion[16] $\psi_\alpha:\mathbf{B}^n\to\mathbf{B}$ mit der Eigenschaft

(H) $\beta(\alpha(a_1,..,a_n)) = \psi_\alpha(\beta(a_1),..,\beta(a_n))$

für alle $(a_1,..,a_n)\in \mathbf{E}^n$ und für jede Belegung $\beta:\mathbf{P}\to\mathbf{B}$.

Beweis: Sei $A\in\mathbf{P}$ beliebig. Gemäß dem induktiven Aufbau von **P** in DEF. (2.1.2) ist A ein endlicher String. Der String A enthalte n EA-Zeichen. Aus A sei die Aussageform $\alpha=\alpha(x_1,..,x_n)$ in Reinform (und reduzierter Darstellung, d.h. die Platzhalter x_i seien paarweise verschieden) wie in 2.1.3 beschrieben abgeleitet; γ sei die Junktorenabbildung. α ist ein endlicher String bestehend aus Zeichen der Menge $\{x_1,..,x_n\}\cup\mathbf{J1}\cup\mathbf{J2}\cup\{(,)\}$. Ersetzt man jeden in α vorkommenden Junktor $\boldsymbol{j}\in\mathbf{J1}\cup\mathbf{J2}$ durch sein Bild $\gamma\boldsymbol{j}\in\mathbf{V1}\cup\mathbf{V2}$ so wird aus α ein n-stelliger Ausdruck $\psi_\alpha = \psi_\alpha(x_1,..,x_n)$, den man als n-stellige algebraische Funktion $\psi_\alpha:\mathbf{B}^n\to\mathbf{B}$ auffassen kann, wenn die Werte von ψ_α dadurch entstehen, dass man das Variablentupel $(x_1,..,x_n)$ durch ein beliebiges Wertetupel $(w_1,..,w_n)\in\mathbf{B}^n$ ersetzt. Gemäß der induktiven DEF.(2.3.2) für „Belegung" ist ψ_α genau die in (H) gewünschte algebraische Funktion. Nach unserer Konstruktion ist ψ_α ist von der Art der Belegung β **unabhängig**.

Anmerkung: In Verallgemeinerung des Begriffs „Junktor" kann man eine n-stellige Aussageform α: $\mathbf{E}^n\to\mathbf{P}$ in **Reinform** auch einen *n-stelligen Junktor* auf **P** nennen. Ist ψ_α die – gemäß dem Homomorphiesatz – zu α gehörige algebraische Funktion auf **B**, so definiert (H) eine Erweiterung γ' der bijektiven **Junktorenabbildung** γ auf alle Aussageformen $\alpha\in$ Funk(**J1,J2, E**). Wenn man für die Erweiterung der Junktorenabbildung statt γ' einfach wieder γ schreibt, kann man (H) in einer von Belegungen *unabhängigen* Schreibweise auch formulieren als

(H') $\gamma\alpha = \psi_\alpha$ für alle $\alpha\in$ Funk(**J1,J2, E**).

Hält man **P=[E,J1,J2], (B,V1,V2)** und die Junktorenabbildung γ: $\mathbf{J1}\cup\mathbf{J2} \to \mathbf{V1}\cup\mathbf{V2}$ fest, so bestimmt das Tripel **(P,B, γ)** eine gewisse wertebasierte Aussagenlogik. Die Elementarbelegungen $\beta°:M\to\mathbf{B}$ ($M\subseteq\mathbf{E}$) werden aber bei gegebenem Tripel (**P,B,γ**) als **variierbar** behandelt, um gewisse „**allgemeingültige Gesetze**" der Logik **(P,B, γ)** – also solche, die für ***alle*** Elementarbelegungen $\beta°$ gelten – formulieren zu können. Diese allgemeingültigen logischen Gesetze ergeben sich, wie der Homomorphiesatz lehrt, ***allein aus der Junktorenabbildung und der gegebenen algebraischen Struktur*** **(B,V1,V2)** des Bewertungsbereiches. Das formulieren wir noch mal in dem

---

[15] Aus dem „Extensionalitätsprinzip" ergibt sich: Ersetzt man in einem Ausdruck (Aussagesymbol) A irgendeinen Teilausdruck B (von A) durch einen Ausdruck B' überall dort, wo er in A vorkommt, und hat B' denselben Wahrheitswert wie B, so ist auch der Wahrheitswert des neuen Gesamtausdrucks A' derselbe wie der von A.
In der Anwendung bezeichnet man den Gesamtausdruck A, in dem B vorkommt, auch als einen „Kontext" für B.
In der Sprachphilosophie betrachtet man daneben auch sog. „intensionale Kontexte", in denen z.B. Ausdrücke wie „... glaubt, dass...", „... weiß, dass ...", „... will, dass..." vorkommen. Dort gilt das „Extensionalitätsprinzip" nicht immer: Der Wahrheitswert von A kann sich bei Ersetzen von B durch B' ändern.

[16] Die Bezeichnung „*algebraische Funktion*" für ψ_α weist darauf hin, dass ψ_α allein aus den Basisverknüpfungen der Menge **V1∪V2** aufgebaut ist. Siehe das Glossar.

(2.3.5) Grundsatz der mehrwertigen Aussagenlogik: Γ ist genau dann ein logiches Gesetz[17] der Aussagenlogik **(P,B, γ),** wenn $\gamma\Gamma$[18] eine allgemeine Eigenschaft der Struktur **(B,V1,V2)** des Bewertungsbereichs ist.

Diesen Grundsatz wenden wir nun zur Übertragung einiger Begriffe der klassischen 2-wertigen Aussagenlogik auf eine mehrwertige Logik **(P,B, γ)** an.

2.4 Äquivalenzen und Tautologien

2.4.1 Äquivalenzen

Zwei sprachlich verschiedene Aussagen einer Theorie T mögen „denselben Sachverhalt“ ausdrücken; man nennt sie dann „gleichwertig“ oder „äquivalent“. Im Semantik-Schema lässt sich das wie folgt präzisieren, ohne dass man den Sachverhalt selbst (also das eigentlich „Inhaltliche“) zu kennen braucht. Es bieten sich mehrere Definitionen an.

Seien $F=\alpha_{F.r}(a_1,..,a_m)$, $G=\alpha_{G.r}(b_1,..,b_n)\in$ **P** Aussagesymbole, $E(F,G)=\{a_1,..,a_m , b_1,..,b_n\}$ die Menge der in F, G vorkommenden EA-Zeichen, P(F, G)= [E(F,G); **J1,J2**] sei die daraus erzeugte Aussagesymbolmenge; und sei $\beta°$:E(F,G) $\rightarrow$**B** eine Elementarbelegung, β:P(F,G) $\rightarrow$**B** die daraus abgeleitete Belegung.

(2.4.1) DEF.Ä1: F und G heißen **äquivalent unter der Belegung β**, kurz: „**β-äquivalent**“, in Zeichen: **$F\cong_\beta G$**, genau dann wenn $\beta(F)=\beta(G)$.

(2.4.2) DEF.Ä2: F und G heißen **allgemein-äquivalent**, in Zeichen: **$F\cong G$,** genau dann wenn $\beta(F)=\beta(G)$ gilt für ***alle*** Elementarbelegungen $\beta°$:E(F, G) $\rightarrow$**B.**

Die beiden weiteren Definitionen sind metasprachlicher Natur.

Seien α, α':**E^n**$\rightarrow$**P** n-stellige Aussageformen und sei $\beta°$: **E**$\rightarrow$**B** eine Elementarbelegung, β:**P**$\rightarrow$**B** die daraus abgeleitete Belegung.

(2.4.3) DEF.Ä3: Äquivalenz von Aussageformen: α und α' heißen **äquivalent unter der Belegung β**, kurz: **β-äquivalent**, in Zeichen: **$\alpha\cong_\beta\alpha'$**, genau dann wenn $\beta(\alpha(a_1,..,a_n))=\beta(\alpha'(a_1,..,a_n))$ für ***alle*** $(a_1,..,a_n)\in$ **E^n**.

(2.4.4) DEF.Ä4: Allgemeinäquivalenz von Aussageformen: α und α' heißen **allgemein-äquivalent**, in Zeichen: **$\alpha\cong\alpha'$,** genau dann wenn bei **jeder beliebigen Belegung β** gilt: $\beta(\alpha(a_1,..,a_n))=\beta(\alpha'(a_1,..,a_n))$ für ***alle*** $(a_1,..,a_n)\in$ **E^n**.

Man sieht sofort, dass sowohl $\cong_\beta$ als auch $\cong$ **Äquivalenzrelationen** auf der Menge **P** der Aussagesymbole – bzw. auf der Menge Funk(**J1,J2, $E^n$$\rightarrow$P**) der n-stelligen Aussageformen – sind, d.h. die Relationen $\cong_\beta$ bzw. $\cong$ sind *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv*; denn diese Relationen sind ja über die „=“ Relation auf dem Bewertungsbereich **B** definiert.

(2.4.5) Substitutionssatz: Ist G eine **Teilformel** [vgl. DEF (2.1.3)] des Aussagesymbols F, und ersetzt in F die Teilformel G durch ein dazu äquivalentes Aussagesymbol G' (G'$\cong$G), so ist das resultierende Aussagesymbol F' zu F äquivalent (F'$\cong$F).

Beweis: als Übung – er beruht auf dem Extensionalitätsprinzip.

---

[17] Mit Γ meinen wir eine „allgemeine Äquivalenz“ im Sinne der DEF.(2.4.2) bzw. eine „i-Tautologie“ bzw. der DEF.(2.4.6) – siehe unten.

[18] Mit $\gamma\Gamma$ meinen wir, dass im Ausdruck Γ die Junktoren α durch die Verknüpfungen $\gamma\alpha$ und die EA-Zeichen von Γ durch Variablen über den Bewertungsbereich B ersetzt werden.

Wichtige **Allgemein-Äquivalenzen** der **klassischen** Logik ist sind z.B.

- $X\wedge Y\cong Y\wedge X$, $X\vee Y\cong Y\vee X$, $X\wedge(Y\wedge Z)\cong(X\wedge Y)\wedge Z$, $X\vee(Y\vee Z)\cong(X\vee Y)\vee Z$, $X\vee(X\wedge Y)\cong X\wedge(X\vee Y)\cong X$
  (das entspricht den Gesetzen der Kommutativität, Assoziativität und Absorption, welche die algebraische Struktur definieren, die als „**Verband**" bezeichnet wird.
- $(X\wedge Y)\vee Z\cong(X\vee Y)\wedge(X\vee Z)$, $(X\vee Y)\wedge Z\cong(X\wedge Y)\vee(X\wedge Z)$
  (das entspricht den Distributivgesetzen eines distributiven Verbandes)
- $\neg\neg X\cong X$ (doppelte Verneinung gleichwertig zur Bejahung),
- $\neg(X\vee Y)\cong\neg X\wedge\neg Y$, $\neg(X\wedge Y)\cong\neg X\vee\neg Y$ (Regeln von De Morgan),
- $X\Rightarrow Y\cong \neg X\vee Y$ (meist als *Definition* des Junktors $\Rightarrow$ verwendet),
- $X\Rightarrow Y\cong\neg Y\Rightarrow\neg X$ (erlaubter Umkehrschluss – nicht zu verwechseln mit „$Y\Rightarrow X$", was oft ebenfalls als „Umkehrschluss" zu „$X\Rightarrow Y$" bezeichnet wird, und natürlich nicht allgemeinäquivalent zu $X\Rightarrow Y$ ist.),

u.v.a.m. ..., wobei X, Y **beliebige** Aussagesymbole sind.

Welche dieser allgemeinen Äquivalenzen auch in einer echt *mehrwertigen* Aussagenlogik **(P,B,γ)** gelten, hängt **<u>ausschließlich</u>** von der algebraischen Struktur des Bewertungsbereichs **B** ab.

2.4.2 Weitere Begriffe aus der klassischen Logik

In der klassischen Aussagenlogik (Bewertungsbereich **B**={0, 1}) heißt ein Aussagesymbol F eine ***Tautologie*** (eine „logisch wahre Aussage") bzw. eine ***Antilogie*** (ein „Widerspruch in sich"), wenn β(F) = 1 bzw. β(F)=0 ist für ***alle*** Belegungen β.

In der klassischen Aussagenlogik kann man jede **Allgemeinäquivalenz** in eine **Tautologie** überführen und umgekehrt:
(ÄTTÄ) Satz: $A\cong B$ gdw. $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$ eine Tautologie

Die wichtigsten Tautologien der **klassischen** Logik sind:

- $X\vee\neg X$ „*tertium non datur*" [19],
- $\neg(X\wedge\neg X)$ „*Satz vom Widerspruch*",
- $X\Rightarrow X$ „*triviale Folgerung*",
- $[X\wedge(X\Rightarrow Y)]\Rightarrow Y$ „*modus ponens*",

u.v.a.m...., wobei X ein beliebiges Aussagesymbol ist. Welche dieser Tautologien auch in anderen Logiken gelten, hängt **<u>ausschließlich</u>**
(a) von der algebraischen Struktur des Bewertungsbereichs **B bzw.**
(b) der Wahl eines sog. „Designationsbereichs" **W** ab (vgl. 2.4.3.1).

In der klassischen Aussagenlogik sind folgende weitere Formulierungen üblich:

Ein Aussagesymbol A heißt ***erfüllbar***, wenn es eine Belegung β: P(A)→{0,1} gibt mit β(A)=1. Entsprechend heißt A ***unerfüllbar***, wenn β(A)=0 gilt für ***alle*** Belegungen β: P(A)→{0,1}.

Der „***Modell***-Begriff" wird in der klassischen Aussagenlogik so definiert: Sei A ein Aussagesymbol. Eine Belegung β:P(A)→{0, 1} heißt ein ***Modell*** für A, wenn β(A)=1 gilt. Die Metaaussage *„Es gibt ein Modell für A"* ist also dasselbe, wie wenn man sagt: *„A ist erfüllbar"*. Ebenso ist *„Es gibt kein Modell für A"* dasselbe, wie wenn man sagt: *„A ist unerfüllbar".*
Ist Σ eine Menge von Aussagesymbolen, so heißt eine Belegung β:P(Σ)→{0, 1} ein ***Modell*** für Σ, wenn β(F)=1 gilt für alle F∈Σ.

Der ***semantische Folgebegriff*** wird in der klassischen Aussagenlogik so definiert: Sei Σ eine Menge von Aussagesymbolen und A eine einzelnes Aussagesymbol. Man sagt:

---

[19] Der lateinische Begriff „*tertium non datur*" (= „ein Drittes wird nicht gegeben") ist hier stets in dem Sinne gemeint, dass $\beta(X\vee\neg X)=1$ gilt für beliebige Bewertung β. Der Begriff „*tertuim non datur*" soll hier **<u>nicht besagen</u>**, dass es neben 1 und 0 noch weitere Werte im Bewertungungsbereich B gäbe!

(i) „A ***folgt in einem Modell β semantisch aus*** Σ“, in Zeichen: $\Sigma \models_\beta A$,
wenn es ein Modell β von ∑ gibt, das auch Modell von A ist.

(ii) „A ***folgt semantisch aus*** Σ“, in Zeichen: $\Sigma \models A$,
wenn *alle* Modelle von ∑ auch Modelle von A sind.

Sprechweise: Eine Belegung β heiße „zu Σ, A passend“, wenn gilt: β ist abgeleitet aus einer Elementarbelegung $\beta^\circ: E(\Sigma \cup \{A\}) \to \mathbf{B}$.

Der ***syntaktische Beweisbegriff*** wird in der klassischen Aussagenlogik so definiert (vgl. etwa [Kr/Kü.2006, S.207]): Sei Σ eine (endliche) Menge von Aussagesymbolen und A ein einzelnes Aussagesymbol. Sei ferner ***SR*** eine **endliche** Menge von **Regeln**, die angeben, ob und wie man „von Σ nach A übergehen“ darf. (***SR*** enthält meist die bekannteste, von *Aristoteles* stammende, Regel des „*modus ponens*“, die besagt, dass man von {X, X⇒Y} nach Y übergehen darf.). Man sagt:

(iii) „A ist aus Σ ***herleitbar*** (ableitbar / beweisbar)“, in Zeichen: $\Sigma \vdash_{SR} A$,
wenn es eine endliche Folge $C_1, C_2, ..., C_n$ von Aussagesymbolen gibt, an deren Ende A steht (C_n=A), derart dass für jedes i∈{1, ..,n} eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:
(1) $C_i \in \Sigma$ bzw.
(2) C_i entsteht durch Anwendung der Regeln von ***SR*** aus einer Teilmenge von $\{C_1,..,C_{i-1}\}$.

(iv) Die Folge $(C_1, C_2, ..., C_n)$ mit C_n=A nennt man auch einen „***Beweis***“ von A aus Σ.

2.4.3 Übertragung von Begriffen aus der klassischen Logik

All diese Formulierungen kann man auf eine mehrwertige Logik **(P,B,γ)** übertragen, wenn man festlegt, welche **B**-Werte als „wahr“ gelten sollen.

Den Begriff der „Tautologie“ / „Antilogie“ kann man auf eine mehrwertige Aussagenlogik zunächst folgendermaßen übertragen, **ohne** festzulegen, welche **B**-Werte als „wahr“ gelten sollen:

(2.4.6) DEF.i-Taut: Sei **(P, B, γ)** eine mehrwertige Aussagenlogik und **i∈B** ein gewisser Wert des Bewertungsbereichs. Sei F∈**P** ein Aussagesymbol und E(F) die Menge der in F vorkommenden EA-Zeichen. F heiße eine **i-Tautologie**, wenn gilt

$\beta(F) = \mathbf{i}$

für ***alle*** Elementarbelegungen $\beta^\circ: E(F) \to \mathbf{B}$. Gibt es *kein* **i∈B** mit β(F) = **i** für *alle* Elementarbelegungen β, so sagen wir „*F ist keine i-Tautologie*“.

Anm.: Der Begriff **„i-Tautologie“** ist in der Literatur unüblich. Ich führe ihn ein, weil ich nicht für alle hier betrachteten Logiken **(P,B,γ)** auf der Deutung „wahr“ für einen oder gewisse Werte aus **B** bestehe. Die Tautologien der klassischen Logik wären somit als „1-Tautologien“, ihre Antilogien als „0-Tautologien“ zu bezeichnen. Mit der DEF (2.4.6) will ich nur unterscheiden, ob es in der algebraischen Struktur des Bewertungsbereichs **B nichttriviale konstante** algebraische Funktionen $f:\mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ gibt oder nicht[20].

Es hängt **ausschließlich** von der algebraischen Struktur des Bewertungsbereichs **B** ab, ob es für ein i∈**B** überhaupt eine i-Tautologie gibt oder nicht. Weiter unten werden wir Logiken kennen lernen, die für *kein* i∈**B** i-Tautologien aufweisen.

Zur Übertragung der weiteren in **2.4.2** genannten Begriffe in eine echt mehrwertige Logik braucht man aber die Festlegung, welche **B**-Werte als „wahr“ gelten sollen.

2.4.3.1 Designationsbereich, Normal- und Standardbedingung

Enthält der Bewertungsbereich **B** *mehr als 2 Elemente*, und will man trotzdem auf der Hervorhebung der Qualität „wahr“ gegenüber der Qualität „falsch“ beharren, so bietet

[20] Eine algebraische Funktion $f:B^n \to B$ heiße „konstant“, wenn es ein c∈**B** gibt mit $f(b_1,..,b_n)=c$ für alle $(b_1,..,b_n) \in B^n$. f heiße „nichttrivial“, wenn es eine Aussageform $\alpha(x_1,..,x_n)$ in **Reinform** gibt (vgl. 2.2.3.3) mit $\beta(\alpha(a_1,..,a_n))=f(\beta a_1,..,\beta a_n)$ für *alle* $(a_1,..,a_n) \in E^n$, wobei E die Menge der EA-Zeichen ist.

sich gemäß dem Vorschlag von *Gottwald* in [Go.1989, S.20] an, eine gewisse nicht-leere, echte Teilmenge **W** (**W⊂B, W≠∅**) **auszuzeichnen** (zu „***designieren***“), deren Elemente man so zu sagen als „die Wahrheit eher qualifizierend“ ansieht, als es die Elemente des Komplements **B-W** tun. **W** nennt *Gottwald* einen „**Designationsbereich**“. Die Wahl eines **W** hat also den Zweck, die Denkweise in mehrwertiger Logik der derjenigen der klassischen 2-wertigen Logik „näherzubringen“, indem man die Werte von **W** als „wahr“-Werte auffasst; ob man dann die Werte von **B-W** *alle* als „falsch“-Werte auffassen will, hängt von der Interpretation in einem geeigneten Anwendungsgebiet ab.

Zwischenbemerkung: Die Werte von **W** als „wahr“-Werte *und alle* Werte von **B-W** als „falsch“-Werte aufzufassen, ist sicher ***nicht immer*** das Ziel einer mehrwertigen Logik! Man würde bei einer solchen Interpretation eines Designationsbereichs die Interpretations- und Anwendungsmöglichkeiten mehrwertiger Logiken zu sehr einschränken, weil man damit gerade das zurückholen würde, über das man mit einer mehrwertigen Logik hinausgehen will: das „wahr/falsch“-Denken. *Gottwald* besteht denn auch **nicht** darauf, dass **jede** der von ihm betrachteten mehrwertigen Logiken einen Designationsbereich **W** in diesem eingeschränkten Sinne gestatten müsste. In **2.6.1** geben wir ein außermathematisches Anwendungsbeispiel für eine Logik mit beliebigem endlichen *linearem* Bewertungsbereich, wo die Festlegung eines „Designationsbereichs“ **W** für die Interpretation gar nicht erforderlich ist. In **2.6.4** geben wir ein Beispiel für eine 4-wertige Logik mit *nichtlinearem* Bewertungsbereich an, die zwar aus der 2-wertigen klassischen (in natürlicher Weise) abgeleitet ist, die jedoch nicht die Beurteilung „wahr“ / „falsch“ zum Ziel hat, sondern die 4 Alternativen des „Recht-gebens“ in einem Streit zweier rivalisierender Positionen formalisiert.

Bleiben wir aber noch eine Weile bei dem Vorschlag von *Gottwald*!

Um sich von der klassischen Aussagenlogik nicht zu sehr zu entfernen, schlägt Gottwald, [Go.1989, S.20], eine sog. „*Normalbedingung*“ und eine sog. „*Standardbedingung*“ als eventuelle Eingrenzung für die betrachteten mehrwertigen Logiken vor. Diese beiden Bedingungen formuliere ich hier mit meinen eigenen Bezeichnungen:

(2.4.7) DEF.Normalbedingung: Sei **(P,B,γ)** eine mehrwertige Aussagenlogik mit der Sprache **P=[E, J1, J2]** und **(B,V1,V2)** als Bewertungsbereich.

(i) Wir sagen, der Bewertungsbereich **B** erfülle die „*Normalbedingung*“, wenn er zwei besondere verschiedene, mit 0, 1 bezeichnete, Elemente einhält. Darüber hinaus sagen wir:

(ii) Eine 1-stellige Verknüpfung $\varphi\in$ **V1** erfülle die *Normalbedingung*, wenn die Be schränkung von φ auf {0,1} nur Werte in {0,1} ergibt, u. zwar so, dass $\varphi_{|\{0,1\}}$ eine **surjektive** Abbildung *auf* {0,1} ist. Entsprechend sagen dann wir auch vom Junktor $\gamma^{-1}\varphi\in$ **J1**, er erfülle die *Normalbedingung*.

(iii) Eine 2-stellige Verknüpfung $\psi\in$ **V2** erfülle die *Normalbedingung*, wenn die Be schränkung von ψ auf {0,1}x{0,1} nur Werte in {0,1} ergibt, u. zwar so, dass $\psi_{|\{0,1\}x\{0,1\}}$ eine **surjektive** Abbildung *auf* {0,1} ist. Entsprechend sagen dann wir auch vom Junktor $\gamma^{-1}\psi\in$ **J2**, er erfülle die *Normalbedingung*.

(iv) Von der Logik **(P,B,γ)** sagen wir, sie erfülle die *Normalbedingungen*, wenn (i) gilt, und *alle* Junktoren aus **J1∪J2** die Normalbedingung (ii) bzw. (iii) erfüllen.

(v) Soll ein ***Designationsbereich*** **W** (**W**$\subset$**B, W**$\neq\emptyset$) eingeführt werden, so sagen wir **W** erfülle die *Normalbedingung*, wenn $1\in$**W** und $0\notin$**W** gelten.

Gottwald geht noch ein bisschen weiter in seinem Vorschlag der Annäherung einer mehrwertigen Logik an die klassische 2-wertige Logik und stellt eine sog. „*Sandard-bedingung*“ für **(P,B,γ)** auf. Man erhält sie dadurch, dass man die Metaausagen „$\beta(X)=1$“ bzw. „$\beta(Y)=0$“ ersetzt durch „$\beta(X)\in$**W**“ bzw. „$\beta(Y)\notin$**W**“ :

(2.4.8) DEF.Standardbedingungen: Man sagt: **(P,B,γ)** erfüllt die „*Standardbedingungen*“, wenn die Junktorenmenge **J1** ein Zeichen $\neg$ und die Junktorenmenge **J2** Zeichen $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ enthalten, so dass bei Wahl eines Designationsbereichs **W** (mit **W**$\subset$**B, W**$\neq\emptyset$) für **alle** Aussagesymbole X, Y und **alle** Belegungen **β:P→B** gilt:

(i)	$\beta(\neg X)\in$**W**	gdw.	$\beta(X)\notin$**W**
(ii)	$\beta(X\vee Y)\notin$**W**	gdw.	$\beta(X)\notin$**W** und $\beta(Y)\notin$**W**
(iii)	$\beta(X\wedge Y)\in$**W**	gdw.	$\beta(X)\in$**W** und $\beta(Y)\in$**W**
(iv)	$\beta(X\Rightarrow Y)\notin$**W**	gdw.	$\beta(X)\in$**W** und $\beta(Y)\notin$**W**

Anmerkung (2.4.8a): Ich möchte noch kurz andeuten, dass eine Aussagenlogik **(P,B,γ),** in der es Junktoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ gibt, und wo ein Designationsbereich **W** ausgezeichnet ist, so dass alle „Normalbedingungen“ ***und*** die „Standardbedingungen“ gelten, eigentlich wenig neues bringt. Eine solche Aussagenlogik, möge mit **(P,B,W,γ)** bezeichnet werden. Wegen der Normalbedingungen kann man nun einen festen Homomorphismus[21] δ:**B**→**B** mit $\delta x=1$ für alle $x\in$**W** und $\delta y=0$ für alle $y\in$**B-W** einführen (also Bildδ ={0,1}). Nimmt man statt der Belegungen β:**P→B** die „Belegungen“ $\beta^{\#} := \delta\circ\beta$:**P**$\to\{0,1\}$, so erhält man aus **(P,B,W,γ)** die klassische 2-wertige Logik **(P,{0,1},{1},γ).** (Eine solche Anmerkung ist mir in [Go.1989] nicht aufgefallen.)

Das bedeutet: „*interessante*“ mehrwertige Logiken, d.h. solche die gegenüber der 2-wertigen Logik neue, nicht-klassische Interpretationen gestatten, sind gerade diejenigen, in welchen entweder *gar kein* Designationsbereich eingeführt ist, oder solche (*mit* Designationsbereich), welche die „Normalbedingungen“ oder die „Standardbedingungen“ ***nicht*** alle erfüllen.

2.4.3.2 Tautologien, Erfüllbarkeit, Modelle, Folge- und Beweis-Begriff

Hat man einen Designationsbereich **W** (mit **W**$\subseteq$**B, W**$\neq\emptyset$**, W**$\neq$**B**) ausgezeichnet, so kann man die in 2.4.2 aufgezählten Begriffe der klassischen Logik dadurch auf eine mehrwertige Logik übertragen, indem man „$\beta(X)=1$“ durch „$\beta(X)\in$**W**“ ersetzt:

(2.4.9) DEF.Taut: Ein Aussagesymbol F heiße eine **Tautologie**, wenn $\beta(F)\in$**W** gilt für *alle* Elementarbelegungen β°: E(F) →**B**.

Daraus folgt mit Hilfe des Substitutionssatzes (2.4.5) sofort:

(2.4.9a) Substitutionssatz für Tautologien: Sei F eine Tautologie und E(F) = $\{a_1,...,a_n\}$ die Menge der in F vorkommenden EA-Zeichen. Seien ferner $A_1,...,A_n$ beliebige zusammengesetzte Aussagesymbole. Ersetzt man in F a_i durch A_i für alle $i\in\{1,...,n\}$, so erhält man aus F ein Aussagesymbol G, das wieder eine Tautologie ist.

[21] δ:**B**$\to\{0,1\}$ sei ein Homomorphismus bezüglich aller Verknüpfungen *, +, •,... der algebraischen Struktur **B**. Das heißt, es gelte: $\delta(x^*) = (\delta x)^*$, $\delta(x+y) = \delta x + \delta y$, $\delta(x\bullet y) = \delta x \bullet \delta y$ usw... für alle $x,y\in$**B**.

Anmerkung: Die Frage, ob es in einer bestimmten Aussagenlogik **(P,B,γ)** überhaupt „Tautologien“ gebe, hängt (a) von der gegebenen algebraischen Struktur des Bewertungsbereichs **B** und (b) von der Wahl des Designationsbereichs **W** ab.

(2.4.10) DEF.erf: Ein A∈**P** heiße **erfüllbar**, wenn es eine Elementarbelegung β°:E(A) →**B** gibt mit β(A)∈**W.** A heiße dagegen **unerfüllbar**, wenn β(A)∈**B–W** gilt für *alle* Elementarbelegungen β°:E(A) →**B.**

(2.4.11) DEF.Modell[22]: Sei A ein Aussagesymbol. Eine (zu A passende) Elementarbelegung β°:E(A) →**B** heiße ein ***Modell*** für A, wenn β(A)∈**W** gilt. Ist Σ eine Menge von Aussagesymbolen, so heiße eine (zu Σ passende) Elementarbelegung β°:E(Σ)→**B** ein ***Modell*** für Σ, wenn β(F)∈**W** gilt für alle F∈Σ.

Anmerkung: Die Begriffe „Erfüllbarkeit“ und „Modell“ besagen also dasselbe.

(2.4.12) DEF.sem.Folge: Sei Σ eine Menge von Aussagesymbolen und A eine einzelnes Aussagesymbol. Man definiert:

(i) „A ***folgt im Modell β semantisch aus*** Σ“, in Zeichen:
  $\Sigma \models_\beta A$,
  wenn es eine zu Σ und A passende Belegung β gibt, unter der sich mit β(F)∈**W** für alle F∈Σ auch β(A)∈**W** ergibt.

(ii) „A ***folgt semantisch aus*** Σ“, in Zeichen:
  $\Sigma \models A$,
  wenn **jedes** Modell für Σ auch Modell für A ist.

(iii) Ist Σ = ∅, so schreiben wir statt $\varnothing \models_\beta A$ bzw. $\varnothing \models A$ auch
  $\models_\beta A$ bzw. $\models A$

$\models_\beta A$ bedeutet nichts anderes als β(A)∈**W**, und $\models A$ bedeutet nichts anderes, als dass A eine **Tautologie** im Sinne der obigen DEF.(2.3.7). ist.

Beachte, dass die Zeichen $\models_\beta$, $\models$ nicht zum Alphabet der formalen Sprache **P** gehören; sie sollen also nicht verwechselt werden mit dem eventuell im Alphabet von **P** auftretenden „wenn ... dann“-Junktor „⇒“.

Anmerkung: Würde man in der Definition mehrwertiger Logiken auf ***Sparsamkeit*** mit neuen Zeichen oder Begriffen achten, so bräuchte man nur den **Belegungsbegriff**. Der Modellbegriff[21] und der Folgebegriff sind eigentlich unnötig. Die Begriffe habe ich hier nur angeführt, weil sie sich nun mal aus historischen Gründen eingebürgert haben, und einige Sätze der klassischen 2-wertigen Logik leichter zu formulieren gestatten. Ältere Logik-Bücher, z.B. [Go.1989] (zur mehrwertigen Logik), werden m.E. übermäßig dick durch Einführung zu vieler unnötiger Zeichen und Begriffe! Ein positives Gegenbeispiel ist [Kr/Kü.2006] (dort wird nur die klassische 2-wertige Logik behandelt).

Beachte aber: wenn man in einer mehrwertigen Logik **(P,B,γ)** ***keine*** Auszeichnung eines „Designationsbereichs“ **W⊆B** vornimmt, so verliert der Erfüllbarkeits-, der Modell- und der semantische Folgebegriff seinen Sinn, wogegen der **Belegungsbegriff** natürlich weiterhin sinnvoll und notwendig bleibt. Für manche Anwendungen

---

[22] Der „*Modell*“-Begriff ist historisch bedingt und stammt aus der Zeit, als man noch danach fragte, ob die Axiome eines mathematischen Systems S in einem intuitiven Sinne „wahr“ seien. Man betrachtete sie als „wahr“, wenn man zu S außerhalb der Mathematik ein bekanntes und selbst als „evident“ anerkanntes Anwendungsystem fand, das auf S „passte“ und das man dann ein „Modell“ für S nannte. In diesem Sinne galten zum Beispiel die Axiome der Euklidischen Geometrie als „wahr“, weil man glaubte, als evidents Modell dazu den uns umgebenden Anschuungsraum nehmen zu dürfen. Der Modell-Begriff diente also eher als eine praktische „Krücke des Vertrauens“ in eine mathematisches Axiomensystem, wenn es bislang nicht gelungen war, dieses als in sich widerspruchsfrei zu erweisen. Von dieser archarischen Denkweise ist man in der Mathematik erst ab etwa der Mitte des 19. Jh. abgerückt. Nur in der Ontologie und Metaphysik hat er im alten Sinne weiter eine Rolle gespielt. Den „Modell“-Gedanken hat man trotzdem auch in der Mathematik beibehalten, einfach, weil er von praktisch-psychologischem Nutzen ist. Man hat ihn aber vom alten „Wahrheits“-Begriff abgekoppelt.

einer mehrwertigen Logik ist die Auszeichnung eines Designationsbereichs **W⊆B** gar nicht nötig; Beispiel: siehe unten in Kap. **2.5.1**.

2.4.4 Der syntaktische Beweisbegriff

Die Formulierungen zum „**syntaktischen Beweis-Begriff**“ können wir aus der klassischen Logik für eine mehrwertige Logik **wörtlich übernehmen**, denn darin kommen weder der Belegungs-Begriff noch der „Wahrheitsbegriff“ (in Form eines „Designationsbereichs“) vor.

(2.4.13) DEF.synt.Beweis: Sei Σ eine endliche Menge von Aussagesymbolen und A ein einzelnes Aussagesymbol. Sei ferner ***SR*** eine **endliche** Menge von **Regeln**, die angeben, ob und wie man „von Σ nach A übergehen“ darf. Man sagt:

(i) „A ist aus Σ ***herleitbar*** “ (ableitbar / beweisbar), in Zeichen:
$\boldsymbol{\Sigma \vdash_{SR} A}$,

wenn es eine endliche Folge $C_1, C_2, ..., C_n$ von Aussagesymbolen gibt, an deren Ende A steht (C_n=A), derart dass für jedes i∈{1, ..,n} eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

(1) $C_i \in \Sigma$ bzw.

(2) C_i entsteht durch Anwendung der Regeln von ***SR*** einer der Teilmenge von $\{C_1,..,C_{i-1}\}$.

(ii) Die Folge ($C_1, C_2, ..., C_n$) mit C_n=A nennt man auch einen „***Beweis***“ von A aus Σ.

Anmerkung-1: Der syntaktische Beweisbegriff ist – genau so wie in der klassischen Logik – neben dem semantischen Folgebegriff **einfach notwendig**, denn die Definition für „A folgt semantisch aus Σ“ (Σ⊨A) sagt überhaupt nichts darüber aus, **wie** man **zeigt,** dass A aus Σ (semantisch) hervorgehe, d.h. wie man **zeigt**, dass, wenn die Aussagen von Σ als „wahr“ vorausgesetzt werden, auch A „wahr“ (im angenommenen Sinne) sei.

Anmerkung-2: Das System ***SR*** der **Herleitungsregeln** wird für eine vorliegende mehrwertige Logik **(P,B,γ)** i.allg. anders aussehen als bei der klassischen Logik. In der klassischen Logik ist die wichtigste Regel die des „*modus ponens*“, die besagt, dass man von {A, A⇒B} zu B übergehen darf. Es kann aber sein, dass in der Logik **(P,B,γ)** der Junktor „⇒“ gar nicht definiert ist, d.h. dass, wenn A, B Aussagesymbole von **P** sind, die Figur „A⇒B“ gar kein Aussagesymbol mehr ist. Der klassische „modus ponens“ könnte in **(P,B.γ)** dann garnicht angewendet werden. Für einen angemessenen Beweisbegriff zur Logik **(P,B,γ)** hängt also alles davon ab, wie ***SR*** „passend zu **(P,B,γ)**“ gebaut ist.

Anmerkung-3: Die Begriffe ⊨ und $\vdash$**e**$_{\mathbf{SR}}$ stehen bei mehrwertigen Logiken vorerst ***ziemlich zusammenhanglos*** nebeneinander. Einen Zusammenhang zwischen dem semantishen Folgebegriff ⊨ und dem syntaktischen Herleitungsbegriff $\vdash_{\mathbf{SR}}$ muss man erst in der **Metasprache herstellen**. Hat etwa **B** eine solche Struktur, dass es in **(P,B,γ)** überhaupt **i-Tautologien** gibt, und wird ein Designationsbereich **W⊂B** ausgewählt, sodass **(P,B,γ)** die Normanlbedingungen (2.4.7) erfüllt, so kann der Zusammenhang zwischen ⊨ und $\vdash_{\mathbf{SR}}$ eventuell so hergestellt werden: Ist **Ax** eine endliche (ausreichende) Menge von **Ausdrucks-Schemata**, die bei Einsetzen beliebiger Aussagesymbole von **P Tautologien** in **(P,B,γ)** ergeben, so kann man mit Festsetzung weniger Regeln (**SR**) aus **Ax** alle Tautologien von **(P,B,γ)** erzeugen. So geht z.B. *Gottwald*, [Go.1986, S.37-53] bei den sogenannten Kalkülen $\mathbf{K_{RT}}$ gemäß *Rosser / Turquette* (1952) vor. Dort geht in die Schemata von **Ax** ein Junktor „→“ ein, und als einzige SR-Regel wird der „*modus ponens*“ (bezüglich „→“) verwendet wird. Dies deckt den Zusammenhang zwischen dem semantischen Folgebegriff und dem syntaktischen Herleitungsbegriff für eine größere Gruppe von mehrwertigen Logiken **(P,B,γ)** ab.

2.5 Eingrenzung der Struktur des Bewertungsbereichs

2.5.1 Ein Blick auf [Go.1989]

Nun ist es an der Zeit, die algebraische Struktur des **Bewertungsbereichs B** etwas genauer zu untersuchen und einzugrenzen, damit ich Beispiele für Aussagenlogiken **(P, B, γ)** im Sinne meines in 1.3 angedeuteten Sprachverständnisses geben und sie mit bekannten Beispielen – etwa von *Kleene*, *Łukasiewicz*, *Gödel, Belnap, Heyting* – vergleichen kann.

In den Betrachtungen von *Gottwald* [Go.1989] fällt mir auf, dass ein endlicher Bewertungsbereich **B** (dort mit $\boldsymbol{w}^s$ bezeichnet), soviel ich gesehen habe, bei ihm nur als eine ***linear*** geordnete Menge **B**:= {0, 1/m, 2/m, ..., (m-1)/m, 1} von m+1 rationalen Zahlen angenommen wird, (wobei **0** bzw. **1** an die Wahrheitswerte „falsch" bzw. „wahr" der klassischen Aussagenlogik erinnern). Die Ordnung der Werte (bei Gottwald eben eine *lineare*) scheint für die von Gottwald betrachteten Logiken keine Rolle zu spielen. Für mich aber schon, wie ich in einigen Beispielen zeigen will.

Die den Junktoren $\vee$ (oder) $\wedge$ (und) entsprechenden Verknüpfungen $\gamma\vee$, $\gamma\wedge$ auf **B** werden in [Go.1989] dann in unterschiedlichster Weise mit Hilfe der Addition, Subtraktion und Multiplikation rationaler Zahlen, sowie mit Hilfe von Betragsbildung, Minimum- und Maximumbildung definiert. Daneben werden die unterschiedlichsten Möglichkeiten für die den Junktoren $\neg$ (nicht) und $\Rightarrow$ (wenn... dann ...) entsprechenden Verknüpfungen $\gamma\Rightarrow$, $\gamma\neg$ auf **B** diskutiert, die jedoch ähnlich wie $\gamma\vee$ und $\gamma\wedge$ gebildet werden. In den meisten Fällen – bis auf ein paar Ausnahmen von *Łukasiewicz* und *Belnap* – stelle ich aber fest, dass $\gamma\vee$ und $\gamma\wedge$ in [Go.1989] nichts anderes sind, als die beiden (zueinander dualen) Verknüpfungen **+**, **•** eines *nur linearen* ***Verbandes*** (**B,** ≤ ,**+**,**•**). Das entspricht zwar durchaus meinem in 1.3 angedeuteten Sprachempfinden, (worüber jedoch in [Go.1989] nichts dergleichen erwähnt wird), aber die *Linearität* ist meiner Ansicht nach eine zu starke Einschränkung, denn sie kann z.B. nicht formalisieren, was ich in 1.3 „unvergleichliche" (oder auch „gleichrangige") Äußerungen genannt habe; und so etwas wird in [Go.1989] auch nicht thematisiert. In **2.6.4** werden wir eine Logik mit *nichtlinearem* Bewertungsbereich vorstellen, die zwar weniger in der Mathematik, aber in manchen außermathematischen Anwendungsgebieten, besonders in der *östlichen Philosophie*, im *Rechtswesen*, sowie in der „*systemischen Strukturaufstellung*" (eine Therapiemethode) eine Rolle spielt.

2.5.2 Unsere Eingrenzungen der B-Struktur

Um einerseits den natürlichen Verbandscharakter der Bewertungsbereiche zu betonen und uns andererseits nicht zu sehr von der klassischen 2-wertigen Logik zu entfernen, vereinbaren wir folgende Eingrenzungen:

(2.5.1) Eingrenzung-1: Der Bewertungsbereich **B** der hier betrachteten mehrwertigen Aussagenlogiken **(P,B,γ)** sei stets ein (linearer oder auch nichtlinearer) **endlicher Verband (B, ≤ ,+,•, ...),** wobei die Verknüpfungen + und • den Junktoren $\vee$, $\wedge \in$ **J2** entsprechen sollen: $\gamma\vee$ = **+**, $\gamma\wedge$ = **•**. Die Pünktchen **...** deuten an, dass auf **B** noch weitere Zusatzverknüpfungen definiert sein dürfen.

Eine ausführliche Rechtfertigung für die Eingrenzung-1 geben wir, sobald wir in Kap. 2.5.1 definiert haben, was unter einem **endlichen Verband** zu verstehen ist.

Für die Einführung weiterer Junktoren wie etwa $\neg$, $\Rightarrow$, ... ist diese Eingrenzung-1 noch weitgehend offen: Die Verknüpfungen $\gamma\neg$ =*, $\gamma\Rightarrow$=→, ... können einfach als Zusatzstrukturen auf der Verbandsstruktur **(B, ≤ ,+,•)** erklärt werden. Wir wollen uns jedoch **nicht nur** auf **lineare** Verbände als Bewertungsbereiche beschränken!

(2.5.2) Eingrenzung-2: Der Bewertungsverband soll die ***Normalbedingungen*** (2.4.7)(i) –(iii) erfüllen.

Die Bedingung (2.4.7)(v) ist irrelevant in den Fällen, wo wir gar keinen Designationsbereich **W**$\subset$**B** einführen wollen. Aus diesem Grunde fordern wir auch ***nicht*** allgemein die Geltung der Standardbedingungen (2.4.8).

(2.5.3) Rechtfertigung der Eingrenzung-2: Die *Eingrenzung-2* besagt einfach, dass wir unsere mehrwertigen Logiken nicht im Widerspruch zur klassischen 2-wertigen Aussagenlogik definieren wollen. Die Eingrenzung-2 steht *auch nicht in einem Widerspruch zur Eingrenzung-1*. Denn *jeder* endliche Verband **B** enthält das Element **1** := sup**B**, und das Element **0** := inf**B** (siehe unten, Kap. 2.5.1), und die Hauptverknüpfungen + bzw. • des Verbandes **B** ***erfüllen stets*** die Normalbedingungen und können den Junktoren ∨ bzw. ∧ zugeordnet werden. Ist in **B** irgendeine zusätzliche 1-stellige Verknüpfung ***:B→B** definiert, die als Verneinungsoperator dienen soll, so brauchen wir nur **1*=0 und 0*=1** zu fordern (die Wirkung von * auf andere x∈**B** kann noch variiert werden); die so erweiterte Struktur **(B, ≤, *, +, •)** erfüllt dann ebenfalls die Normalbedingungen (2.4.7)(i)-(iii). Damit ist die klassische **2-wertige Logik stets inbegriffen als eine Teillogik.**

2.5.3 Verbände

Sei (B,≤) eine **Halbordnung**, d.h. B ist eine Menge und ≤ ⊆ BxB ist eine **reflexive**, **antisymmetrische** (=identitive) und **transitive** Relation auf B. Zwei Elemente x,y∈B heißen **vergleichbar**, wenn x≤y oder x≤y ist, andernfalls **unvergleichbar**.
(Statt „unvergleichbar“ sage ich bei manchen Anwendungen auch „gleichrangig“.)

Eine Halbordnung (B,≤) heiße **linear**, wenn *alle* x,y ∈ B vergleichbar sind. (Wir wollen uns jedoch nicht nur auf lineare Halbordnungen beschränken!)

Ist x≤y für ein Paar x,y∈B, so heißt x eine **untere Schranke** von y und y eine **obere Schranke** von x. Sei X⊆B; wir definieren die Mengen
(1) US(X):={z∈B **|** z≤x für alle x∈X} – Menge der unteren Schranken von X
(2) OS(X):={z∈B **|** x≤z für alle x∈X} – Menge der oberen Schranken von X.

Besteht X aus nur einem Element x, so schreiben wir statt US({x}) bzw. OS({x}) kürzer US(x) bzw. OS(x). Es kann sein, dass X überhaupt keine gemeinsame obere bzw. untere Schranke hat, d.h. die Mengen US(X), OS(X) können leer sein. Im Falle y∈US(X) bzw. z∈OS(X) schreiben wir auch y≤X bzw. X≤z. Folgenden Hilfssatz werden wir später noch brauchen: Seien X,Y⊆B; falls die Mengen der unteren bzw. oberen Schranken von X, Y, X∪Y nicht leer sind, gilt:

(3) US(X∪Y) = US(X)∩US(Y), OS(X∪Y) = OS(X)∩OS(Y)

Beweis: sei u∈US(X∪Y), d.h. u≤v für alle v∈X∪Y; dann ist auch u≤x für alle x∈X und u≤y für alle y∈Y, also: aus u≤ X∪Y folgt u≤X **und** u≤Y; d.h. US(X∪Y)⊆US(X)∩US(Y). Ist umgekehrt u∈US(X)∩US(Y), so gilt u≤X **und** u≤Y, also u≤v fürv∈X oder v∈Y; d.h. US(X)∩US(Y) ⊆ US(X∪Y). – Entsprechend für OS.

Zu einer Menge Z⊆B definieren wir die Mengen
(4) MinZ:={y∈Z **|** y≤z für alle z∈Z} – Minimum von Z
(5) MaxZ:={y∈Z**|** z≤y für alle z∈Z} – Maximum von Z

Es kann sein, dass MinZ=∅ bzw. MaxZ=∅ ist. Ist aber MinZ≠∅, so besteht MinZ aus genau einem Element, das wir mit **minZ** bezeichnen.
Denn: sei u,v∈MinZ, dann gilt sowohl u≤v als auch v≤u und daher (weg. d. Antisymmetrie der Halbordnung) u=v.
Ebenso besteht im Fall MaxZ≠∅ die Menge MaxZ aus genau einem Element, das wir mit **maxZ** bezeichnen. Zu einer Menge X⊆B definieren wir schließlich
(6) **infX := maxUS(X)** – das „Infimum“ der Menge X:
die größte untere Schranke von X
(7) **supX:= minOS(X)** – das „Supremum“ der Menge X:
die kleinste obere Schranke von X.

Aus (3) bis (6) folgt, falls die Infima und Suprema existieren:

(8) $\inf(X\cup Y) = \inf\{\inf X, \inf Y\}$, $\sup(X\cup Y) = \sup\{\sup X, \sup Y\}$

(9) $\inf(X\cup Y\cup Z) = \inf((X\cup Y)\cup Z) = \inf\{\inf(X\cup Y), \inf Z)\}$
$= \inf(X\cup(Y\cup Z)) = \inf\{\inf X, \inf(Y\cup Z)\}$
$\sup(X\cup Y\cup Z) = \sup((X\cup Y)\cup Z) = \sup\{\sup(X\cup Y), \sup Z)\}$
$= \sup(X\cup(Y\cup Z)) = \sup\{ \sup X, \sup(Y\cup Z)\}$

Beweis: als Übung.

Nun können wir definieren, was unter einem Verband zu verstehen ist:

(2.5.4) DEF.Verband: Eine Halbordnung $(B,\leq)$ heißt ein **Verband**, wenn zu jedem Paar $x,y\in B$ das Infimum $\inf\{x,y\}$ und das Supremum $\sup\{x,y\}$ in B existiert. Dafür schreiben wir auch

(i) $x\bullet y := \inf\{x,y\}$, $x+y := \sup\{x,y\}$

Damit sind zwei Verknüpfungen $\bullet$, + : $B\times B\to B$ auf der Menge B definiert. Wir notieren ihre grundlegenden Eigenschaften:

(ii) Für alle $x,y\in B$ gilt: $x\bullet y \leq x \leq x+y$, $x\bullet y \leq y \leq x+y$ und
$x\leq y$ gdw. $x\bullet y=x$ gdw. $y=x+y$

Beweis: Das geht direkt aus (i) hervor.

(iii) Die Verknüpfungen $\bullet$ und + sind für alle $x,y,z\in B$

(K)	**kommutativ**	$x\bullet y = y\bullet x$, $x+y = y+x$
(Id)	**idempotent**	$x\bullet x = x+x = x$
(As)	**assoziativ**	$(x\bullet y)\bullet z = x\bullet(y\bullet z)$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
(Ab)	gegenseitig **absorptiv**	$x\bullet(x+y) = x+(x\bullet y) = x$

Beweis: Kommutativität ergibt sich direkt aus der Def. (i).
Idempotenz: $x\bullet x=\inf\{x,x\} =\max US(x)=x$, $x+x=\sup\{x,x\}=\min OS(x)=x$
Assoziativität: folgt aus (9).
Absorption: folgt aus DEF.(i) und (9): Denn $x\bullet(x+y)=\inf\{x, \sup\{x,y\}\}=x$, da $x\leq\sup\{x,y\}$; dual entsprechend der zweite Teil.

(2.5.5) DEF.vollständiger Verband: Ein Verband B heißt **vollständig**, wenn das Supremum und das Infimum ***jeder*** Teilmenge $X\subseteq B$ existiert.

Offenbar hat ein vollständiger Verband ein *größtes* Element, nämlich $\sup B= \min OS(B) = \max B$, das wir mit $\mathbf{1}_B$ (oder einfach mit **1**) bezeichnen, und ebenso ein *kleinstes* Element, nämlich $\inf B=\max US(B)=\min B$, das wir mit $\mathbf{0}_B$ (oder einfach mit **0**) bezeichnen. Was ist mit der *leeren* Menge $\emptyset\subseteq B$? DEF.(2.5.5) fordert, dass auch $\emptyset$ ein Supremum und ein Infimum habe. Es führt nicht zu Inkonsistenzen, wenn man setzt:

(10) $\inf\emptyset:=\sup B = \mathbf{1}$ und $\sup\emptyset:=\inf B = \mathbf{0}$

Begründung: (8) besagt: $\inf(X\cup Y) = \inf\{\inf X, \inf Y\}$, $\sup(X\cup Y) = \sup\{\sup X, \sup Y\}$, setze $X:=\{x\}$ für beliebiges $x\in B$ und $Y=\emptyset$: Dann wird $x=\inf X=\inf\{x, \inf\emptyset\}$, sei $\underline{m}:=\inf\emptyset$, dann gilt mit (9): $x=x\bullet\underline{m}=x\leq\underline{m}=x+\underline{m}$ für alle $x\in B$, also folgt m=1, also $\inf\emptyset=1$. Dual folgt aus (8) und (9): $\sup\emptyset=0$.

(2.5.6) Satz: Jeder **endliche** Verband ist **vollständig**.

Beweis: Schreibt man eine aus k Elementen $x_1,...,x_k$ bestehende Teilmenge $X\subseteq B$ in der Form $X=\{x_1\}\cup...\cup\{x_k\}$, so folgt die Behauptung aus einer wiederholten Anwendung von (8).

Anmerkung: Natürlich ist nicht jeder vollständige Verband endlich: Z.B. ist die Menge Pot(M) aller Teilmengen einer abzählbaren Menge M ein sogar überabzählbarer vollständiger Verband, wobei die Halbordnung $\leq$ von der Mengeninklusion $\subseteq$, sowie das größte Verbandselement **1** durch M bzw. das kleinste Verbandselement **0** durch $\emptyset$ dargestellt wird.

Einen Verband kann man aber auch „rein algebraisch" über zwei Verknüpfungen +, $\bullet$ definieren.

(2.5.7) Satz: Sei (B, +, •) eine algebraische Struktur, deren Verknüpfungen für alle $x,y,z \in B$ den Axiomen

(K) **Kommutativität** $x•y = y•x$, $x+y = y+x$
(As) **Assoziativität** $(x•y)•z = x•(y•z)$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
(Ab) **Absorptivität** $x•(x+y) = x+(x•y) = x$

genügen. Dann gilt auch das Gesetz der

(Id) **Idempotenz** $x•x = x+x = x$, und die durch
(Ho1) $x\leq y$:gdw. $x•y = x$

definierte Relation $\leq$ ist eine **Halbordnung** auf B mit der Eigenschaft, dass für alle $x,y\in B$ gilt:

(Ho2) $x\leq y$ gdw. $y = x+y$, sowie:
$x•y = \inf\{x,y\}$, $x+y = \sup\{x,y\}$.

Damit ist (B, +, •) ein **Verband** gemäß Def.(2.5.4).

Beweis von (Ho1), (Ho2) als Übung.

Die Verbandseigenschaften von **(B,+,•)** drücken sich in der Logik **(P,B, γ)** so aus:

(2.5.8) Ist **(P,B,γ)** eine mehrwertige Aussagenlogik mit einem endlichen Verband **B** als Bewertungsbereich, so bestehen für beliebige Aussagesymbole F, G, H ∈ **P** die folgenden Äquivalenzen:

(K) $F\vee G \cong G\vee F$, $F\wedge G \cong G\wedge F$
(As) $(F\vee G)\vee H \cong F\vee(G\vee H)$, $(F\wedge G)\wedge H \cong F\wedge(G\wedge H)$
(Ab) $F\vee(F\wedge G) \cong F\wedge(F\vee G) \cong F$
(Id) $F\vee F \cong F\wedge F \cong F$

(2.5.9): DEF. Ein vollständiger Verband (B,≤, +, •) heißt ...

(i) **linear**, wenn die Halbordnung ≤ linear ist, d.h.: für alle $x,y\in B$ gilt $x\leq y$ oder $y\leq x$,
(statt „lineare Halbordnung“ sagt man auch „totale Halbordnung“)

(ii) **distributiv in + und •**, wenn für alle $x,y,z\in B$ gilt:
$x+(y•z) = (x+y)•(x+z)$ und $x•(y+z) = (x•y)+(x•z)$,

(iii) **komplementär**, wenn es zu jedem $x\in B$ ein $x^c\in B$ gibt mit
$x+x^c=1$, $x•x^c=0$,

(iv) **Boole-Verband**, wenn B *komplementär* und *distributiv* ist.

Es gibt noch andere Verbandstypen, auf die wir aber hier nicht eingehen.

(2.5.10) Satz: Ein **linearer** Verband B ist **distributiv in + und •**,
(jedoch für |B|>2 *kein* Boole-Verband).

Beweis: Für $x\leq y\leq z$ folgt die Distributivität sofort aus (Ho1), (Ho2) unter Satz (2.5.7): Da **B** linear ist, sind x, y, z untereinander stets vergleichbar. Man gehe alle Möglichkeiten der Anordnung von drei Elementen x, y, z durch; dann folgt die Distributivität jedes Mal aus (Ho1), (Ho2) unter Satz (2.5.7).

Anmerkung-1: Ein **nicht-linearer** Verband muss nicht distributiv sein.

Anmerkungen-2 zu endlichen Boole-Verbänden:
(i) Der für die klassische Logik **(P,{0, 1}, γ)** als *Bewertungsbereich* dienende Verband ({0,1}, ≤, *, +, •) ist ein Boole-Verband – der kleinste nichttriviale[23], den es gibt – , wobei $x^* = x^c$ und $\gamma_\neg=*$ als Verneinungsoperator und die durch $x\to y := x^*+y$ definierte Verknüpfung $\gamma_\Rightarrow = \to$ als Implikationsoperator gelten.
(ii) Ist **B** ein ***endlicher*** Verband, so kann er höchstens dann boolesch sein, wenn er aus 2^n Elementen besteht (n=1, 2, 3, ...), denn jeder endliche Boole-Verband (B, ≤, *, +, •) ist isomorph zu einem Potenzmengenverband (Pot(M), ⊆, c, ∪, ∩) mit endlicher Basismenge M – und Pot(M) hat 2^n Elemente, wenn |M|=n ist. (Vgl. z.B. [Bf/Zu.1974] /S. 105)
(iii) Wegen (ii) bekommt man aus dem einfachsten nichttrivialen Booleverband (B_2={0,1},≤, *, +, •) (0<1) bis auf Isomorphie ***jeden*** endlichen Booleverband durch Bildung der **Produktalgebren** $B_2^n = B_2 x...x B_2$ (n mal, n∈**N**), wobei sowohl die Halbordnung

[23] Den aus nur *einem* Element bestehenden Verband, nennen wir den „*trivialen*“ Verband.

$\leq$ als auch die Verknüpfungen *, +, $\bullet$ einfach „vektoriell" auf die n-Tupel $(x_1,...x_n)$ $(x_i \in B_2)$ übertragen werden. (Beispiel: $(x,y) \leq (u,v)$ wird definiert durch $x \leq u$ und $y \leq v$; $(x,y)^* := (x^*,y^*)$; $(x,y)+(u,v) := (x+u, y+v)$) usw....) – Der Beweis ist trivial!

(2.5.10a) Anmerkung-3:
Wie bekommt man auf einfache Weise viele Beispiele für *nicht-lineare* Verbände?
Die letzte Anmerkung (iii) kann man verallgemeinern: Hat man für einen kleinen, endlichen linearen Verband (B,≤,+,•) eine Anwendungslogik gefunden, für die B als Bewertungsbereich (ggf. mit passenden Zusatzverknüpfungen * und →) gefunden, so ist die Methode der **Produktbildung** sehr nützlich, um „sehr viele" weitere endliche *nichtlineare* Verbände zu konstruieren, und damit eventuell auch neue „passende" Anwendungen zu finden: Für Anwendungen außerhalb der Mathematik erachte ich die Produktbildungsmethode für fruchtbar, würde aber meist nur Bewertungsverbände mit *wenigen* Elementen für sinnvoll halten.

2.5.4 Begründung der Eingrenzung-1

Ist der Bewertungsbereich **B** einer mehrwertigen Aussagenlogik **(P,B,γ)** ein endlicher Verband (**B**, ≤, +, •), und wählen wir für Aussagesymbole F, G,... ∈ **P** eine beliebige Belegung β, so induziert die Halbordnung ≤ von **B** eine **Quasihalbordnung** $\blacktriangleleft_\beta$ auf **P** vermöge der Definition

(2.5.11) DEF.Quasiordnung: Sei β:**P**→**B** eine feste Belegung. Dann definieren wir für alle Aussagesymbole F,G∈ **P** die Relation $\blacktriangleleft_\beta$ wie folgt:

$F \blacktriangleleft_\beta G$:gdw. $\beta(F) \leq \beta(G)$

Es gilt dann gemäß DEF.(2.4.1):

$F \cong_\beta G$ gdw. $F \blacktriangleleft_\beta G$ und $G \blacktriangleleft_\beta F$,

und aus der Transitivität von ≤ auf **B** folgt die Quasi-Transitivität von $\blacktriangleleft_\beta$ auf **P**. Mit der bijektiven Zuordnung $\gamma_\vee = +$ und $\gamma_\wedge = \bullet$ der Junktorenabbildung bekommen wir aus den Verbandsregeln für **B** für beliebige Aussagesymbole F, G ∈ **P**:

$F \wedge G \blacktriangleleft_\beta F \blacktriangleleft_\beta F \vee G$, $F \wedge G \blacktriangleleft_\beta G \blacktriangleleft_\beta F \vee G$, sowie
$F \blacktriangleleft_\beta G$ gdw. $F \wedge G \cong_\beta F$ gdw. $G \cong_\beta F \vee G$, und schließlich
$F \vee (F \wedge G) \cong_\beta F \wedge (F \vee G) \cong_\beta F \vee F \cong_\beta F \wedge F \cong_\beta F$

Auch die „*Unvergleichbarkeit*" von Äußerungen (wie etwa im Beispiel in 1.3 zwischen A und C) kann in **(P,B,γ)** dargestellt werden, wenn man für den Bewertungsbereich **B** einen **nicht-linearen** endlichen Verband nimmt.

Dies alles entspricht ziemlich gut meinem in Kap.1.3 angedeuteten „Sprachverständnis" der (inhaltlichen) „Vergleichbarkeit" bzw. „Unvergleichbarkeit", des „Umfassens" (Verallgemeinerns), des „Einschränkens" und der „Gleichwertigkeit" von Äußerungen. Der in Kap.1.3 erwähnte inhaltliche „*Kontext*" K kann dabei durch die besondere Wahl von γ und **B** und durch die gewählte feste Belegung β repräsentiert werden.

Außerdem ist, wie gesagt, mit der Eingrenzung-2 die klassische 2-wertige Aussagenlogik stets inbegriffen in einer mehrwertigen Logik **(P,B,γ)** mit **B** als einem endlichen Verband, sofern man gemäß **(2.5.3)** zusätzlich irgendeinen *Verneinungsoperator* $\gamma_\neg$ = * einführt, der nur **0*=1 und 1*=0** erfüllen muss (ansonsten aber noch variierende Eigenschaften haben darf).

Kritische Anmerkung: Ist in **(P,B,γ)** der Bewertungsbereich **B** ein endlicher Verband, so folgt daraus **nicht** (wie in [Br/Zu.1974, S.63] und anderen Quellen zur klassischen 2-wertigen Aussagenlogik zu lesen ist), dass **P** mit irgendeiner festen Belegung β selbst ein Verband werde; denn durch β wird auf **P** nur eine *Quasi-Halbordnung*, aber keine *Halbordnung* induziert. Ferner würden wir uns in den Möglichkeiten für mehrwertige Aussagenlogiken zu sehr einschränken mit der Forderung, dass **P** selbst (unabhängig von irgendwelchen Belegungen) ein vollständiger „Quasi-Verband" sein solle: Dann müsste es ja in einer solchen Logik stets eine 1-Tautologie und eine 0-Tautologie (im Sinne von DEF.(2.4.6)) geben. Die Vorgehensweise, „Konstanten" T und ⊥, wie man oft liest, für „true" und „false" **in die formale Sprache P selbst** einzuführen, empfinde ich daher schlicht als eine Sprachebenenverwischung, weil man damit nicht mehr zwischen der formalen Sprache **P** und dem Bewertungsbereich **B**

unterscheidet, und dadurch auch der wichtige Begriff der (variabel zu haltenden!) *Belegung* keinen Sinn mehr hätte. Eine Einführung von T und ⊥ hat m.E. nur Sinn, wenn T Symbol für eine „1-Tautologie", ⊥ eines für eine „0-Tautologie" ist. Ferner sind die Begriffe „Tautologie" / „Antilogie" abhängig (a) von der Struktur des Bewertungsbereichs **B**, (b) von der Wahl und Interpretation eines Designationsbereichs **W**⊂**B** – beides Strukturkriterien, die **nicht** in **P** selbst zu finden sind. Diese Sprachebenenverwischung liegt m.E. auch in [Go.1989, S.12-25] bei der anfänglichen Definition von „Wert^S(...) := ..." vor, bzw. dort sind Begriffe schon in die formale Sprache **P** eingeführt – z.B. eine Menge K^S von „Konstanten zur Bezeichnung bestimmter Quasiwahrheitswerte", die mir nicht notwendig erscheinen, sondern die Sache unnötig komplizieren.

Dass der Bewertungsbereich ***endlich*** sein soll, hat eher praktische Gründe: Die Bewertung von Aussagen in einer Schulklassenarbeit oder von „Meinungen" in einer Meinungsumfrage orientiert sich meist an einer *endlichen* (kleinen, aber nicht notwendig immer linearen) Notenskala mit mehr als zwei Werten. Schließlich soll ja eine Bewertung eine möglichst „einfache" Beurteilung einer Vielzahl von Äußerungen sein, und da ist ein kleiner endlicher Bereich handhabbarer als ein unendlicher Bereich. Außerdem umgehen wir damit die besonderen rein mathematischen Probleme, die sich bei unendlichen Bewertungsbereichen auftun.

2.5.5 Die Junktoren ¬ und ⇒

Wenn wir uns auf endliche **Verbände** (**B**,≤, +, •) als Bewertungsbereiche für mehrwertige Logiken einschränken, haben wir uns zunächst nur auf die Deutung γ der Junktoren ∨ (für „oder", γ∨=+) und ∧ (für „und", γ∧=•) festgelegt. Die Deutung eines Junktors ¬ (für „nicht") ist nur „schwach" festgelegt durch die **Eingrenzung-2** und gibt einer spezielleren Deutung noch genügend Raum. Die Einführung eines Junktors ⇒ (für „wenn ... dann ...") ist noch ***völlig frei***.
Eventuell ist es sogar angebracht, mehrere Varianten $\neg_1$, $\neg_2$, .. für eine Negation bzw. mehrere Varianten $\Rightarrow_1$, $\Rightarrow_2$, .. für eine Implikation in derselben Logik **(P,B,γ)** zu betrachten und entsprechend mehrere weitere 1- bzw. 2-stellige Verknüpfungen in die Verbandsstruktur **(B, ≤, V1, V2)** aufzunehmen.

2.6 Beispiele mehrwertiger Aussagelogiken

2.6.1 Eine Logik für Meinungsumfragen – linearer Bewertungsverband

Ist der endliche Verband (**B**, ≤, +, •) ***linear*** und besteht aus m+2 Elementen, so ordnen sich diese in der Form

$$0 < w_1 < ...< w_m < 1$$

an (wobei „x<y" soviel wie „x≤y und x≠y" bedeutet).

Sei nun (**P**,**B**,γ) eine mehrwertige Aussagenlogik mit einem endlichen *linearen* Verband **B** als Bewertungsbereich, bestehend aus m+2 Werten, **B**={0, w_1,.., w_m, 1}. Eine dazu passende Anwendung ist zum Beispiel eine **Meinungsumfrage**, in der viele Meinungen zu einem gewissen – etwa politischen – **Thema** klassifiziert werden sollen in m+2 Klassen. Die Gesamtheit **M** aller zu erhebenden Meinungen entspricht einer Teilmenge der formalen Sprache **P**. Da nicht jeder Befragte seine eigene Meinung zum Thema des Langen und Breiten in die Umfrageerhebung einbringen kann, formuliert das Meinungsinstitut m+2 „Vorbewertungen" zum Thema und nimmt die Meinung der Befragten dadurch auf, dass es jeden Befragten eine (oder mehrere) der m+2 Vorbewertungen ankreuzen lässt. Nach Auswertung der Statistik hat nun jeder der m+2 Vorwerte eine Häufigkeit, ein „Gewicht". Ordnet man die Vorwerte nach diesem Gewicht, so bekommt man (nach Normierung auf 0 ... 1) als Ergebnis eine Skala

$0 < w_1 < ...< w_m < 1$ als die Ordnung eines *linearen endlichen Verbandes* **B**.

Jedem Wert w dieser Skala entspricht eine Klasse M(w) von Meinungen in **M**. Der Wert 0 gibt an, dass die wenigsten der Befragten eine Meinung der Klasse M(0) vertreten, 1 gibt an, dass die meisten der Befragten eine Meinung der Klasse M(1) vertreten. Eine Meinung der Klasse M(0) kann man als „*demokratisch am falschesten*", eine der Klasse M(1) als „*demokratisch am wahrsten*" bezeichnen. Und als Verallgemeinerung dazu: Sind v, w zwei Skalenwerte mit v<w, so kann man eine Meinung der Klasse M(w) im Sinne der erhobenen Umfrage *„demokratisch wahrer"* nennen als eine Meinung aus der Klasse M(v).

Bei der weiteren Interpretation des Umfrageergebnisses wird sich das Umfrageinstitut nicht nur der „primitiven" wahr/falsch-Logik, sondern auch der des linearen Verbandes (**B**, ≤, +, •, ...) mit **B**={0, w_1,.., w_m, 1} bedienen: Operiert es mit X∨Y bzw. X∧Y für Meinungen X,Y∈**M,** so benutzt es die Deutungen $\gamma_\vee$ = +, $\gamma_\wedge$= • des Verbandes **B,** d.h.: **X∨Y „umfasst"** die Meinung X (und auch die Meinung Y), X∧Y „**schränkt**" die Meinung X (und auch die Meinung Y) „**ein".**

Zur Analyse des Umfrageergebnisses wird auch eine „*Verneinung*" einer Meinung von Nöten sein. Die einfachste (allerdings nicht die einzig mögliche!) Art, eine **Verneinung** ¬ einzuführen, ist folgende Definition:

Ist X demokratisch weniger wahr als Y, so sei ¬X demokratisch wahrer als ¬Y.

Dem entspricht auf **B** die Operation $\gamma_\neg$ = * **:B→B,** welche x≤y in y*≤x* umwandelt für alle x,y∈**B**.

(2.5.12a) DEF. (**B**,≤, +,•) sei ein endlicher *linearer* Verband. ***:B→B** sei eine Zusatzverknüpfung. Wir sagen: Die Operation * ***„respektiert die lineare Ordnung* von B"**, wenn gilt:

(i) * ist eine **Involution** auf **B**, d.h. * ist bijektiv mit x**=x für alle x∈**B,** und

(ii) x≤y gdw. y*≤x* für alle x,y∈**B.**

Schließlich wird das Umfrageinstitut mit den Umfrageergebnissen auch Folgerungsaussagen der Form X⇒Y („wenn X dann Y") aussprechen wollen.

Welche **B**-Verknüpfung $\gamma_\Rightarrow$:= → könnte man dem **Implikations-Junktor** ⇒ zuweisen? Schauen wir mal auf die klassische 2-wertige Logik:

In der 2-wertigen Logik mit Bewertungsbereich {0, 1} gilt: 0→x=1 für alle x∈{0,1}, 1→1=1 und 1→0=0, das heißt bei irgendeiner Belegung β: **P**→{0,1} auf Aussagen übersetzt: Aus einer „falschen" Aussage X, β(X)=0, darf man sowohl auf eine „wahre" als auch auf eine „falsche" Aussage Y schließen (also: β(X⇒Y)=1, wenn β(X)=0 ist), aus einer „wahren" Aussage X, β(X)=1, darf man nur auf eine „wahre" Aussage Y schließen (also: für β(X)=1 ist β(X⇒Y)=1 nur, wenn auch β(Y)=1 ist). Das läuft aber darauf hinaus, dass, wenn die der Verneinung ¬ entsprechende Operation * – wie oben schon gewählt – die *Involution* auf {0, 1} ist, die Operation →nichts anderes als die durch x→y:= x*+y definierte ist.

Verfolgt das Umfrageinstitut in seiner mehrwertigen Interpretation der Umfrageergebnisse die Strategie, dass es aus einer Meinung X möglichst *keine Aussage folgern will, die „falscher" als die Prämisse X* ist, so wird es der Interpretation wie im klassischen Fall folgen und auf **B** die Folgerungsoperation $\gamma_\Rightarrow$ = → definieren durch

(2.5.12z) DEF. x→y := x*+y

Anmerkung: Von einer „Designation" **W⊆B** (∅≠**W**≠**B**) von Werten in **B,** wie in 2.4.3.1 definiert, hat das Umfrageinstitut bei seiner Logik **gar keinen** Gebrauch gemacht.

Wir geben nun für das Beispiel m=4, also für |**B**|=6, die **Verknüpfungstabellen** des 6-wertigen Verbandes **B** für $\gamma_\neg$= *, $\gamma_\vee$=+ , $\gamma_\wedge$=• und $\gamma_\Rightarrow$=→ an, welche das Umfrageinstitut auf Grund der bisherigen Überlegungen benutzen mag. Dabei schreiben wir gleich statt der abstrakt anmutenden Wertebezeichnungen 0, w_1, w_2, w_3, w_4, 1 die

Werte als

0, 20%, 40%, 60%, 80%, 1

so wie es der Darstellung eines Umfrageergebnisses entspricht. Daraus ergeben sich folgende Verknüpfungstabellen:

Die Verneinungsoperation x*=?

x	0	20%	40%	60%	80%	1
x*	1	80%	60%	40%	20%	0

Die „oder“ Operation x+y =?

		y	y	y	y	y	y
	x+y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	0	20%	40%	60%	80%	1
x	20%	20%	20%	40%	60%	80%	1
x	40%	40%	40%	40%	60%	80%	1
x	60%	60%	60%	60%	60%	80%	1
x	80%	80%	80%	80%	80%	80%	1
x	1	1	1	1	1	1	1

Die „und“ Operation x•y =?

		y	y	y	y	y	y
	x•y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	0	0	0	0	0	0
x	20%	0	20%	20%	20%	20%	20%
x	40%	0	20%	40%	40%	40%	40%
x	60%	0	20%	40%	60%	60%	60%
x	80%	0	20%	40%	60%	80%	80%
x	1	0	20%	40%	60%	80%	1

Die Implikation x→y =?

		y	y	y	y	y	y
	x*+y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	1	1	1	1	1	1
x	20%	80%	80%	80%	80%	80%	1
x	40%	60%	60%	60%	60%	80%	1
x	60%	40%	40%	40%	60%	80%	1
x	80%	20%	20%	40%	60%	80%	1
x	1	0	20%	40%	60%	80%	1

Die Verknüpfungstabellen für + und • sind natürlich dieselben wie bei *jedem* beliebigen 6-elementigen *linearen* Verband. Nur die Tabelle für → hängt von der speziellen Wahl (2.5.12z) ab.

Welche aus der klassischen 2-wertigen Logik geläufigen logischen Gesetze gelten nun in dieser mehrwertigen für Meinungsumfragen geeigneten Aussagenlogik **(P,B,γ)** mit dem *linearem* endlichem Verband (**B**, ≤, *, +, •, →) als Bewertungsbereich, und welche nicht?

(2.5.12c) Satz: Sei (**B**, ≤,* , +, •, →) ein ***linearer*** endlicher Verband aus mehr als 2 Elementen, wobei

(i) die Zusatzverknüpfung *:**B**→**B** die *lineare Ordnung auf **B** respektiert*, und

(ii) die Zusatzverknüpfung →:**B**×**B**→**B** definiert sei durch x→y:= x*+y für alle x,y∈**B.**

Dann ist Folgendes der Fall:

(iii) Die Regeln von De-Morgan, (x+y)* = x*•y*, (x•y)* = x*+y* gelten für alle x,y∈**B.**

(iv) Die Verknüpfung • kann aus den Verknüpfungen * und + *abgeleitet* werden: x•y := (x*+y*)* für alle x,y∈**B** (ebenso kann + aus * und • abgeleitet werden: x+y:=(x*•y*))

(v) Der sogenannte *„Satz vom Widerspruch*“, (x•x*) = 0 bzw. (x•x*)* =1, gilt **nicht** für die x∈**B** mit 0<x<1, sondern es gilt nur, dass x•x*, (x•x*)* ∈ {x, x*}.

(vi) Das sogenannte *„tertium non datur“,* x*+x =1 bzw. (x*+x)*=0, gilt **nicht** für die x∈**B** mit 0<x<1, sondern es gilt nur x*+x=sup{x,x*}=max{x,x*}, (x*+x)*=inf{x,x*} =min{x,x*}.

(vii) Ist |**B**| ungerade, so gibt es ein x „in der Mitte von **B**“ mit der Eigenschaft x*=x.

(viii) Der „Umkehrschluss“: y*→x* = x→y gilt für alle x,y∈**B.**

(ix) Die „Negierte Folgerung“: (x→y)* = x•y* gilt für alle x,y∈**B.**

(x) Die „triviale Folgerung“ x→x=1 gilt **nicht** für die x∈B mit 0<x<1, sondern es gilt nur x→x = sup{x, x*} = max{x, x*}.

Beweis (iii): Da alle x,y vergleichbar sind, sei o.B.d.A x≤y vorausgesetzt, dann ist nach (ii): y*≤x*. Aus (Ho1)(Ho2) folgt dann (x+y)*=y*, x*•y*=y*, und damit (x+y)* = x*•y*. Das zweite De-Morgan-Gesetz ergibt sich dual entsprechend.
Beweis (iv) – (x): als Übung.

Übersetzt in die Sprechweise der Aussagenlogik heißt das: Ist **(P,B,γ)** eine Logik mit einem linearem endlichen Bewertungsverband (**B**, $\leq$, *, +, $\bullet$, $\rightarrow$) und $\gamma(\neg,\vee,\wedge,\Rightarrow)$ = (*,+,$\bullet$,$\rightarrow$) wie in (2.5.12b), so gilt (vgl. dazu DEF.(2.4.1) zur Äquivalenz $\cong_\beta$ und DEF.(2.4.2) zu allgemeinen Äquivalenz $\cong$, sowie DEF.(2.4.6) zur i-Tautologie.):

(i) $\neg\neg X \cong X$ für alle $X\in$ **P**

(ii) $X\Rightarrow Y \cong \neg X\vee Y$ für alle $X,Y\in$ **P** [wegen der Vereinbarung (i)]. (In der klassischen 2-wertigen Logik führt man $X\Rightarrow Y$ meist als „Abkürzung" direkt in **P** durch $X\Rightarrow Y := \neg X\vee Y$ ein.)

(iii) $\neg(X\vee Y) \cong \neg X\wedge\neg Y$, $\neg(X\wedge Y) \cong \neg X\vee\neg Y$ für alle $X,Y\in$ **P** (Regeln von De-Morgan)

(iv) $X\wedge Y \cong \neg(\neg X\vee\neg Y)$, $X\vee Y \cong \neg(\neg X\wedge\neg Y)$ (der Junktor $\wedge$ kann bis auf Äquivalenz aus $\vee$ und $\neg$ abgeleitet werden; ebenso der Junktor $\vee$ aus $\wedge$ und $\neg$.)

(v) $X\wedge\neg X$ bzw. $\neg(X\wedge\neg X)$ sind im Fall |**B**|>2 ***keine*** Tautologien in **(P,B,γ)**.
Der „*Satz vom Widerspruch*" gilt also ***nicht***.

(vi/vii) $\neg X\vee X$ bzw. $\neg(\neg X\vee X)$ sind im Fall |**B**|>2 ***keine*** Tautologien in **(P,B,γ)**.
Das *„tertium non datur"* gilt also ***nicht***.

(viii) Ist |**B**| ungerade, so gibt es zu jeder Aussage X eine Belegung β, so dass $\neg X \cong_\beta X$ ist.

(ix) $\neg Y\Rightarrow\neg X \cong X\Rightarrow Y$ für alle $X,Y\in$ **P** (d.h. der Umkehrschluss gilt).

(x) $X\Rightarrow X$ ist *keine* Tautologie im Fall |**B**|>2.

(Die in (v), (vi/vii), (x) ausgeschlossenen Tautologien gelten nur in Fall B={0,1})

Die Eigenschaft (iv) besagt (ganz wie in der klassischen 2-wertigen Logik):

(2.5.13) Satz: Ist (**B**,$\leq$, +, $\bullet$) ein linearer endlicher Verband mit der Zusatzverknüpfung * wie in Satz (2.5.12b)(i), so ist *,+ eine ***Verknüpfungsbasis***, d.h. jede n-stellige algebraische Funktion ψ_α:**B**$^n\rightarrow$**B** (n=1, 2, 3, ...) kann aus den Verknüpfungen * und + abgeleitet werden. (Ebenso ist *, $\bullet$ eine Verknüpfungsbasis von **B**.)

In dieser Logik gelten (für |**B**|>2) die bekannten Tautologien des „Satzes vom Widerspruch" und des „*tertium non datur*" ***nicht***. Es gilt sogar der

(2.5.14) Satz: In einer Logik **(P,B,γ)** mit einem wie in (2.5.12b) definierten endlichen linearen Bewertungsbereich (**B**, $\leq$, *, +, $\bullet$, $\rightarrow$) gibt es im Fall |**B**|>2 ***überhaupt keine i-Tautologien***.

Beweis: Nach Satz (2.5.3) können wir *, + als Verknüpfungsbasis für **B** nehmen. Dann findet man zu jedem Aussagesymbol ein dazu allgemein-äquivalentes (vgl. DEF. (2.3.2)), n-stelliges Aussagesymbol $A=\alpha(a_1,..,a_n)$ ($a_i\in$ **E**), für welches $\alpha(x_1,..,x_n)$ eine Aussageform in ***Reinform*** (vgl. 2.1.5), und α ein endlicher String ist, der aus der Zeichenmenge $\{x_1,..,x_n\}\cup\{\neg, \vee\}\cup\{(,)\}$ zusammengesetzt ist. Ersetzt man nun die Junktoren $\neg$, $\vee$ überall, wo sie in α vorkommen, durch Ihre γ-Bilder *, + und interpretiert die Variablen x_i als Variablen auf **B** (statt auf **E**), so bekommt man die zu α gemäß dem Homomorphiesatz (2.2.4) gehörige algebraische Funktion $\psi_\alpha = \gamma\alpha$:**B**$^n\rightarrow$**B**. Die Abbildung $\gamma\alpha$ heißt **konstant**, wenn sie für alle $\underline{a}\in B^n$ denselben Wert hat. Der Ausdruck für $\gamma\alpha$ ist ein endlicher String, der nur aus der Zeichnmenge $\{x_1,..,x_n\}\cup\{*, +\}\cup\{(,)\}$ zusammengesetzt, also in *Reinform* ist. Sei nun n die Stellenzahl von $\gamma\alpha$ in reduzierter Darstellung, k die Stellenzahl in nicht reduzierter Darstellung: Wir beweisen nun die Behauptung ***induktiv*** über n und k:

n=1,	k=1: $\gamma\alpha=\gamma\alpha(x)$	$\gamma\alpha$ kann nur die Form δ=x oder δ=x* haben, ist also in Reinform und nicht konstant.
n=1,	k allgemein	Sind δ und δ' in Reinform und nicht konstant, und ist $\gamma\alpha$ von der Form δ* oder $\delta+\delta'$ oder δ*+δ' oder $(\delta+\delta')$*, so ist $\gamma\alpha$ ebenfalls in Reinform und wegen Satz (2.5.12b)(v),(vi) nicht konstant.
n allgemein:		Sind δ und δ' in Reinform und nicht konstant, und ist $\gamma\alpha$ von der Form δ* oder $\delta+\delta'$ oder δ*+δ' oder $(\delta+\delta')$*, so ist $\gamma\alpha$ ebenfalls in Reinform und wegen Satz (2.5.12b)(vi) nicht konstant.

Damit ist der Satz bewiesen.

Anmerkung: Natürlich gibt es im beschriebenen linearen Bewertungsbereich konstante algebraische Funktionen, die ***nicht in Reinform*** sind, zum Beispiel $\psi(x)=1+x = 1$ für alle $x\in$ **B**; aber solche Funktionen sind ***keine***, die zu einer *Tautologie* im Sinne von DEF.(2.4.6) oder DEF.(2.4.9) gehören würden, denn: ist z.B. $i\in$ **B** ein bestimmter Wert, so entspricht dem i in der vorliegenden Logik ***kein*** Aussagesymbol $A\in$ **P**, das bei *jeder* Belegung β denselben Wert i hätte! Insbesondere wäre es in dieser Logik schlicht *widersprüchlich*, sogenannte Konstanten, etwa als „T", „$\perp$" bezeichnet, *in* **P** ***selbst*** als Aussagesymbole einführen zu wollen! – Das wird aber in [Go.1989] und in manchen anderen Büchern getan!

Will man also in einer Logik mit *linearem* Bewertungsverband „Tautologien“ haben, so *muss* man entweder z.B. die Zusatzverknüpfung * oder z.B. die Zusatzverknüpfung → anders definieren, oder einen Designationsbereich **W** ($W \subset$ **B**, $W \neq \emptyset$) einführen!

Auch die Sätze der klassischen Aussagenlogik über sog. *disjunktive* und *konjunktive Normalformen* – vgl. z.B. [Kr/Kü.2006, S.27ff] – kann man auf mehrwertige Logiken **(P,B,γ)** übertragen, wenn (**B**,≤,*,+,•) ein ***linearer*** Bewertungsverband ist mit einem **die *Ordnung* ≤ *respektierenden*** Verneinungsoperator * ($y^* \leq x^*$ gdw, $x \leq y$ für alle $x,y \in$ **B**).

(2.5.15a) DEF. Literal: Ein Aussagesymbol heiße ein **„Literal“**, wenn es von der Form a oder ¬a ist, wobei a ein **EA-Zeichen** ist.

(2.5.15b) DEF.Normalformen: Seien L_{ij} Literale. Ein Aussagesymbol F heißt in **„disjunktiver Normalform (DNF)“** , wenn gilt

(DNF) $F = (L_{11} \wedge \ldots \wedge L_{1k_1}) \vee (L_{21} \wedge \ldots \wedge L_{1k_2}) \vee \ldots \vee (L_{n1} \wedge \ldots \wedge L_{1k_n})$

F heißt in **„konjuktiver Normalform (KNF)“** , wenn gilt

(KNF) $F = (L_{11} \vee \ldots \vee L_{1k_1}) \wedge (L_{21} \vee \ldots \vee L_{1k_2}) \wedge \ldots \wedge (L_{n1} \vee \ldots \vee L_{1k_n})$

Anmerkung: die ausführlicheren Klammerungen bei (DNF) und (KNF) kann man wegen der ***Assoziativität*** von $\gamma_\vee$=+ und $\gamma_\wedge$=• weglassen, wenn man abkürzend setzt:

$(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots A_n) := (\ldots(((A_1 \vee A_2) \vee A_3) \vee \ldots) \vee A_n)$

$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots A_n) := (\ldots(((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \ldots) \wedge A_n)$

für beliebige $A_i \in$ **P.** Diese Abkürzung führt nicht zu Widersprüchen, denn zum Beispiel sind $(A_1 \vee (A_2 \vee A_3))$ und $((A_1 \vee A_2) \vee A_3)$ zwar unterschiedliche Aussagesymbole, sie sind aber (wegen der Assoziativität der Verbandsverknüpfung +) **allgemein äquivalent** im Sinne der Def. (2.3.2).

(2.5.15c) Satz: Ist der Bewertungsbereich ein ***linearer*** endlicher Verband mit einem die lineare Ordnung ≤ respektierenden Verneinungsoperator *, so gibt es für jedes Aussagesymbol F eine zu F *äquivalente* **DNF** und eine zu F *äquivalente* **KNF**.

Beweis durch Induktion. Für KNF:
F ist ein endlicher String, gebildet aus EA-Zeichen, Junktoren ¬, ∨,∧, ⇒ und Klammern.
(0) Ersetze in F jede Teilformel der Form (G⇒H) durch (¬G∨H).
(1) Ersetze in F jede Teilformel der Form ¬¬G durch G.
(2) Ersetze in F jede Teilformel der Form ¬(G∧H) durch ¬G∨¬H. Entsteht dabei eine Teilformel ¬¬K, so wende (1) an.
(3) Ersetze in F jede Teilformel der Form ¬(G∨H) durch (¬G∧¬H). Entsteht dabei eine Teilformel ¬¬K, so wende (1) an.
(4) Wiederhole die Schritte (2) und (3) (nur endlich viele, weil F ein endl. String ist).
(5) Ersetze in F jede Teilformel der Form (G∨(H∧I) durch ((G∨H)∧(G∨I). Das geht, weil B distributiv ist.
(6) Ersetze in F jede Teilformel der Form (G∧H)∨I) durch ((G∨I)∧(H∨I)). Das geht, weil B distributiv ist.
(7) Wiederhole die Schritte (5) und (6) (nur endlich viele, weil F ein endl. String ist).
(8) Die resultierende Formel ist dann in KNF. Diese Form ist wegen Satz (2.5.12b) allgemein äquivalent zu F.
Dual analog beweist man den Satz zur DNF.

Schaut man sich die Tabelle für $\gamma_\Rightarrow$ = → an, so kann man X⇒Y folgendermaßen interpretieren, wenn man bei einer gegebenen Belegung β sagt: X sei „*demokratisch falscher*“ bewertet als Y (bzw.: Y sei „*demokratisch wahrer*“ bewertet als X) genau dann, wenn $\beta(X)<\beta(Y)$ ausfällt:

(2.5.16a) *„Je demokratisch falscher die Prämisse X bewertet ist, desto demokratisch falscher darf auch die Konklusion Y bewertet sein, damit die Schlussfolgerung X⇒Y selbst als ‚demokratisch nicht zu falsch’ bewertet erscheint“*.

Oder (was auf dasselbe hinausläuft):

(2.5.16b) „*Je demokratisch wahrer die Prämisse X bewertet ist, desto demokratisch wahrer muss auch die Konklusion Y bewertet sein, damit die Schlussfolgerung X⇒Y selbst als ‚hinreichend demokratisch wahr’ bewertet erscheint*“.

Diese Interpretation entspricht m.E. ziemlich gut dem, wie Meinungsforscher mit Meinungsergebnissen umgehen, wenn sie aus einer Meinung(sklasse) auf eine andere Meinung(sklasse) schließen.

Bei diesem Beispiel für die Anwendung einer mehrwertigen Logik **(P,B,γ)** mit linearem Bewertungsbereich **B** sind wir ohne explizite Designation einer Wertemenge **W** $\subseteq$ **B** ausgekommen; vielmehr haben wir **bei gegebener Belegung β** die durch die lineare Ordnung $x \leq y$ (auf **B**) induzierte Quasiordnung $X \blacktriangleleft_{\beta} Y$ [Vgl. DEF.(2.5.11)] interpretiert als: „*X ist nicht wahrer als Y*" (bzw.: „*Y ist nicht falscher als X*"). Nur in der Formulierung „*demokratisch nicht zu falsch*" in (2.5.16a) bzw. „*demokratisch hinreichend wahr*" in (2.5.16b) haben wir implizit einen Designationsbereich „unscharf" umrissen.

2.6.1.1 Eine 3-wertige Logik von Kleene

Der Bewertungsbereich (**B**,≤, *, +,•,→) habe dieselbe lineare Verbandsstruktur wie in Satz (2.5.12b), sei aber nur dreiwertig: **B**={0, i, 1}, 0<i<1. Die Verknüpfungstabellen lauten dann so:

Der Verneinungsoperator x*=?

x	0	i	1
x*	1	i	0

Der „oder"-Operator x+y=?

		y	y	y
	x+y	0	i	1
x	0	0	i	1
x	i	i	i	1
x	1	1	1	1

Der „und"-Operator x•y =?

		y	y	y
	x•y	0	i	1
x	0	0	0	0
x	i	0	i	i
x	1	0	i	1

Der „wenn..dann.." Operator x→y=?

		y	y	y
	x*+y	0	i	1
x	0	1	1	1
x	i	i	i	1
x	1	0	i	1

In dieser Logik **(P,B,γ)** können – je nach Anwendungssystem – die Werte
 1 als „wahr" oder „zutreffend" oder „erwünscht",
 0 als „falsch" oder „unzutreffend" oder „unerwünscht" und
 i als „unbestimmt" oder „undefiniert" oder „indifferent" oder „egal"
interpretiert werden. Mit dieser Interpretation haben wir den Wert 1∈**B** ausgezeichnet (designiert, **W**={1}). Die Werte i, 0∈**B** werden demgegenüber „degradiert".

Und damit gilt – wie in der klassischen Logik – bei gegebener Belegung β:

(i) Eine Implikation X⇒Y ist „wahr" (/ „zutreffend" / „erwünscht"), wenn die Konklusion Y „wahr" (/ „zutreffend" / „erwünscht") ist.

(ii) Ist die Prämisse X „falsch" (/ „unzutreffend" / „unerwünscht"), so ist die Implikation X⇒Y stets „wahr" (/ „zutreffend" / „erwünscht").

Zusätzlich gilt:

(iii) Ist die Konklusion Y „unbestimmt" (/ „undefiniert" / „indifferent" / „egal"), so ist die Implikation X⇒Y nur dann „wahr" (/ „zutreffend" / „erwünscht"), wenn die Prämisse X „falsch" (/ „unzutreffend" / „unerwünscht") ist.

(iv) Ist die Prämisse X „unbestimmt" (/ „undefiniert" / „indifferent" / „egal"), so ist die Implikation X⇒Y nur dann „wahr" (/ „zutreffend"/ „erwünscht"), wenn die Konklusion Y „wahr" (/ „zutreffend"/ „erwünscht") ist.

Wie im allgemeinen Fall gibt es auch hier *keine* Tautologien, aber zu jedem Aussagesymbol gibt es eine äquivalente DNF und eine äquivalente KNF.

Vergleich mit der Literatur: Diese 3-wertige Logik entspricht voll der „$\mathbf{K_3}$“ von ***Stephen Cole Kleene*** (1909-1994), etwa 1950 – vgl. [Wiki. MwL]. Sie entspricht nur „fast“ der „$\mathbf{L_3}$“ von ***Jan Łukasiewicz*** (1878-1956), etwa 1920: Die Operationen +, • und * sind wie hier bei uns definiert; die Operation $\rightarrow_L$ aber weicht in nur einem Punkt ab: Bei der L_3 ist $i \rightarrow_L i = 1$, aber hier bei uns ist $i \rightarrow i = i$ – vgl. [Wiki. MwL].

2.6.2 Eine Heyting-Logik für Intuitionisten?

In den vorangegangenen Beispielen 2.6.1, 2.6.2 fiel auf, dass es dort *überhaupt keine i-Tautologien* – im Sinne von DEF.(2.4.6) – gab. Das geht manchen Mathematikern zu weit. Zum Beispiel will man in „***intuitionistichen***“ Logiken zwar nicht das „*Tertium non datur*“, $X \vee \neg X$, wohl aber den „*Satz vom Widerspruch*“, $\neg(X \wedge \neg X)$, als auch die „*triviale Folgerung*“, $X \Rightarrow X$, als „wahr“ bei allen Belegungen β anerkennen. Zu diesem Zweck hat der niederländische Mathematiker ***Arend Heyting*** (1898-1980) einige Bewertungsalgebren für solche nicht-klassischen Logiken definiert – vgl. [Wiki.Hey]. Wir geben ein Beispiel, das man leicht aus der Verbandsstruktur erhält.

(2.6.1) Def. einer Heyting-Algebra: Sei (**B**,+,•) ein endlicher Verband. Setze für beliebige $a,b \in \mathbf{B}$:
(i) $H(a,b) := \{x \in \mathbf{B} \mid a \bullet x \leq b\}$.
Da jeder endliche Verband vollständig ist, existiert in **B** das Supremum von H(a,b) für jedes Paar $a,b \in \mathbf{B}$. Damit kann man zwei weitere Verknüpfungen auf **B** definieren durch
(ii) $a \rightarrow_H b := \sup H(a,b)$.
(iii) $a^H := a \rightarrow_H 0$
Mit diesen beiden zusätzlichen Verknüpfungen wird der Verband **B** zu einer so genannten endlichen **Heyting Algebra** ($\mathbf{B}, \leq; \ldots^H, +, \bullet, \rightarrow_H$).

Dual zur Def.(2.6.1) könnte man zu jedem Paar $a,b \in \mathbf{B}$ auch die Menge $H'(a,b) := \{x \in \mathbf{B} \mid b \leq a+x\}$ und damit die Zusatzverknüpfungen $a \rightarrow_{H'} b := \inf H'(a,b)$ und $a^{H'} := a \rightarrow_{H'} 1$ definieren und bekäme eine andere Heyting-Algebra, auf die aber m.E. die folgenden Interpretationen nicht so gut passen.
Natürlich kann man solche Heyting-Algebren auch zu jedem nicht-endlichen vollständigen Verband in derselben Weise definieren, aber uns interessieren nur endliche Verbände als Bewertungsbereiche einer nicht-klassischen Logik.

2.6.2.1 Linearer Heytingverband

Wir beweisen einige ihrer Eigenschaften, zunächst speziell bei ***linearer*** endlicher Heyting Algebra.

(2.6.2) Satz: Sei ($\mathbf{B}, \leq; \ldots^H, +, \bullet, \rightarrow_H$) eine **lineare** endliche Heyting-Algebra gemäß Def.(2.6.1), (also eine solche, in der **je zwei** $a,b \in \mathbf{B}$ unter der Halbordnung $\leq$ *vergleichbar* sind). Dann gilt für alle $a, b \in \mathbf{B}$:

(i)	$a \rightarrow_H b$	$= 1$ für $a \leq b$	
		$= b$ für $b < a$	
(ii) speziell	$a \rightarrow_H a$	$= 1$ für alle $a \in \mathbf{B}$	
(iii)	a^H	$= 1$ für $a=0$	
		$= 0$ für $0<a$	
(iv)	a^{HH}	$= 0$ für $a=0$	
		$= 1$ für $0<a$	($\ldots^H$ ist *keine* Involution, falls $\lvert\mathbf{B}\rvert>2$)
(v) speziell	$1^H=0$, $0^H=1$		

(vi)	$a \bullet a^H = 0$	
(vii)	$(a \bullet a^H)^H = 1$	(vi und vii beinhalten die Geltung des SvW)
(viii)	$a + a^H = 1$ für $a=0$	
	$= a$ für $0<a$	(TnD gilt *nicht,* falls $\|\mathbf{B}\|>2$)
(ix)	$(a \bullet b)^H = a^H + b^H$	(de Morgan-1 gilt)
(x)	$(a+b)^H = a^H \bullet b^H$	(de Morgan-2 gilt)
(xi)	$a \to_H b = a^H + b$	($\to_H$ ist durch + und $...^H$ definierbar, analog zur klassischen Logik)
(xii)	$a+b = (a^H \bullet b^H)^H$	(+ ist durch $\bullet$ und $...^H$ definierbar analog zur klassischen Logik)
(xiii)	$a \bullet b = (a^H + b^H)^H$	($\bullet$ ist durch + und $...^H$ definierbar analog zur klassischen Logik)

Beweis (i): $a \to_H b = \sup H(a,b)$ mit $H(a,b)= \{x \in \mathbf{B} \mid a \bullet x \leq b\}$.

Fall $a \leq b$: Sei $H_1 := \{x \in \mathbf{B} \mid a \bullet x \leq b, x \leq a\}$, $H_2 := \{x \in \mathbf{B} \mid a \bullet x \leq b, a \leq x\}$, dann ist $H(a,b)=H_1 \cup H_2$.
$x \in H_1$ gdw.: $x \leq a$ u. $a \bullet x \leq b$ gdw. $a \bullet x = x$ u. $x \leq b$, also H1=US(b)
$x \in H_2$ gdw. $a \leq x$ u. $a \bullet x \leq b$ gdw. $a \bullet x = a$ u. $a \leq b$, also $a \leq b$; das ist für alle x erfüllbar, also $H_2 = \mathbf{B}$.
Also insgesamt $H(a,b)=H_1 \cup H_2 = \mathbf{B}$, also supH=1.

Fall $b<a$: Sei $H_1 := \{x \in \mathbf{B} \mid a \bullet x \leq b, x \leq a\}$, $H_2 := \{x \in \mathbf{B} \mid a \bullet x \leq b, a \leq x\}$, dann ist $H(a,b)=H_1 \cup H_2$.
$x \in H_1$ gdw.: $x \leq a$ u. $a \bullet x \leq b$ gdw. $a \bullet x = x$ u. $x \leq b$, also H1=US(b)
$x \in H_2$ gdw. $a \leq x$ u. $a \bullet x \leq b$ gdw. $a \bullet x = a$ u. $a \leq b$, also $a \leq b$; das ist für kein x erfüllbar, also $H_2 = \emptyset$.
Also insgesamt $H(a,b)=H_1 \cup H_2$=US(b), also supH=b.

Die Behauptungen (ii) – (xiii) sind Spezialfälle von (i). qed.

In dieser Logik **(P, B, γ)** übernehme der Junktor $\Rightarrow := \gamma^{-1}(\to_H)$ die Rolle der „**Implikation**" („wenn ... dann ..."), der Junktor $\neg := \gamma^{-1}(...^H)$ die Rolle der „**Negation**" („nicht ...").

Anmerkung-1: Wie in der klassischen Logik gelten in dieser Heyting-Logik die Tautologien des „*Satzes vom Widerspruch*" $\neg(X \wedge \neg X)$ und der „*trivialen Implikation*" $X \Rightarrow X$, ebenso die *De-Morgan-Regeln* und die allgemeinen Äquivalenzen $X \wedge Y \cong \neg(\neg X \vee \neg Y)$, $X \vee Y \cong \neg(\neg X \wedge \neg Y)$, $X \Rightarrow Y \cong \neg X \vee Y$.

Anmerkung-2: Besteht **B** aus ***mehr*** als nur den zwei Werten 0, 1, so gilt ***nicht*** die Tautologie des „*tertium non datur*" und auch ***nicht***, dass die doppelte Verneinung $\neg\neg X$ allgemein äquivalent zur Bejahung X sei.

Anmerkung-3: Besteht aber **B** nur aus den zwei Werten 0, 1 , so ist **(P,B,γ)** nichts anderes als die übliche 2-wertige Aussagenlogik.

Anmerkung-4: Wie in der klassischen Logik beweist man: Zu jedem Aussagesymbol gibt es eine äquivalente DNF und eine äquivalente KNF.

Beispiel: Ähnlich wie im Kap. 2.5.1 geben wir für das Beispiel |**B**|=6, die **Verknüpfungstabellen** des 6-wertigen linearen Heyting-Verbandes **B** an. Dabei schreiben wir wieder statt abstrakt anmutender Wertebezeichnungen 0, w_1, w_2, w_3, w_4, 1 die **B**-Werte anschaulicher als 0, 20%, 40%, 60%, 80%, 1. Damit ergeben sich folgende Verknüpfungstabellen:

Die Verneinungsoperation x^H=?

x	0	20%	40%	60%	80%	1
x^H	1	0	0	0	0	0

Die „oder“ Operation x+y =?

		y	y	y	y	y	y
	x+y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	0	20%	40%	60%	80%	1
x	20%	20%	20%	40%	60%	80%	1
x	40%	40%	40%	40%	60%	80%	1
x	60%	60%	60%	60%	60%	80%	1
x	80%	80%	80%	80%	80%	80%	1
x	1	1	1	1	1	1	1

Die „und“ Operation x•y =?

		y	y	y	y	y	y
	x•y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	0	0	0	0	0	0
x	20%	0	20%	20%	20%	20%	20%
x	40%	0	20%	40%	40%	40%	40%
x	60%	0	20%	40%	60%	60%	60%
x	80%	0	20%	40%	60%	80%	80%
x	1	0	20%	40%	60%	80%	1

Die Implikation $x \rightarrow_H y$ =?

		y	y	y	y	y	y
	x^H+y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	1	1	1	1	1	1
x	20%	0	1	1	1	1	1
x	40%	0	20%	1	1	1	1
x	60%	0	20%	40%	1	1	1
x	80%	0	20%	40%	60%	1	1
x	1	0	20%	40%	60%	80%	1

Die Verknüpfungstabellen für + und • sind natürlich dieselben wie bei *jedem* 6-elementigen linearen Verband. Interpretieren wir bei einer bestimmten Bewertung β : **P** → **B** für zwei Aussagesymbole X, Y, dass

- „X *falscher als* Y“ bzw. „Y *wahrer als* X“ heiße gdw. $\beta(X)<\beta(Y)$ ist;
- „X *gleichwertig zu* Y“ heiße gdw. $\beta(X)=\beta(Y)$
- „X *falsch*“ heiße gdw. $\beta(X)=0$;
- „X *wahr*“ heiße gdw. $\beta(X)=1$,

so können wir die Implikation „$\Rightarrow_H$“ (einfach als „⇒“ geschrieben) so deuten:

- Die Implikation X⇒Y ist *falsch* gdw. die Konklusion Y *falsch* und die Prämisse X *wahrer als* die Konklusion Y ist.
- Die Implikation X⇒Y ist *wahr* gdw. Prämisse und Konklusion beide *gleichwertig* sind oder die Prämisse X *falscher als* die Konklusion Y ist.
- Die Implikation X⇒Y ist *falscher als wahr* gdw. die Prämisse X *wahrer als* die Konklusion Y ist.

2.6.2.2 Interpretation einer 3-wertigen Heyting-Logik

Der Bewertungsbereich (**B**,≤, $..^H$, +,•,$\rightarrow_H$) habe dieselbe lineare Verbandsstruktur wie in Satz (2.5.18), sei aber nur dreiwertig: **B**={0, i, 1}, 0<i<1. Diesen Spezialfall führen wir hier noch an, um erstens eine mögliche Interpretation der drei **B**-Werte anzugeben und zweitens leicht auf ein „kleines“ Beispiel einer *nichtlinearen* Heyting-Logik zu kommen (siehe Kap.2.6.2.3). Die Verknüpfungstabellen lauten dann so:

Der Verneinungsoperator x^H=?

x	0	i	1
x^H	1	0	0

Der „oder“-Operator x+y=?

		y	y	y
	x+y	0	i	1
x	0	0	i	1
x	i	i	i	1
x	1	1	1	1

Der „und“-Operator x•y =?

		y	y	y
	x•y	0	i	1
x	0	0	0	0
x	i	0	i	i
x	1	0	i	1

Der „wenn..dann..“ Operator $x \rightarrow_H y$=?

		y	y	y
	x^H+y	0	i	1
x	0	1	1	1
x	i	0	1	1
x	1	0	i	1

In dieser Logik **(P,B,γ)** könnten die **B**-Werte z.B. so interpretiert werden:

1 als „*zutreffend*“ (oder „erwünscht“),

0 als „*unzutreffend*“ (oder „unerwünscht“) und
i als „*möglich*“.

Mit dieser Interpretation haben wir den Wert $1\in\mathbf{B}$ ausgezeichnet (designiert, $\mathbf{W}=\{1\}$). Die Werte i, $0\in\mathbf{B}$ werden demgegenüber „degradiert“. Aus der Verneinungstabelle ergibt sich:

(i) „Was nicht *möglich* ist, ist *unzutreffend*“.

Damit gilt betr. 0, 1 – wie in der klassischen Logik – bei entsprechender Belegung β:

(ii) Eine Implikation $X\Rightarrow Y$ ist „*zutreffend*“, wenn die Konklusion Y„*zutreffend*“ ist.

(iii) Ist die Prämisse X „*unzutreffend*“ , so ist die Implikation $X\Rightarrow Y$ stets „*zutreffend*“.

(iv) Die Implikation $X\Rightarrow Y$ ist „*zutreffend“*, wenn $X \cong Y$ (wenn X und Y allgemein-äquivalent.)

Zusätzlich gilt:

(v) Die Implikation $X\Rightarrow Y$ ist nur in einem einzigen Fall „*möglich*“, nämlich wenn die Prämisse X „*zutreffend*“ und die Konklusion Y „*möglich*“ ist.

(vi) Ist die Prämisse X „*möglich*“, so ist die Implikation $X\Rightarrow Y$ nur dann „*unzutreffend*“, wenn auch die Konklusion Y „*unzutreffend* ist.

Vergleich mit der Literatur: Diese 3-wertige Logik entspricht weder der „$\mathbf{K_3}$“ von ***Stephen Cole Kleene*** noch der „$\mathbf{L_3}$“ von ***Jan Łukasiewicz***.

2.6.2.3 Beispiel für einen nicht-linearen Heyting-Verband B²

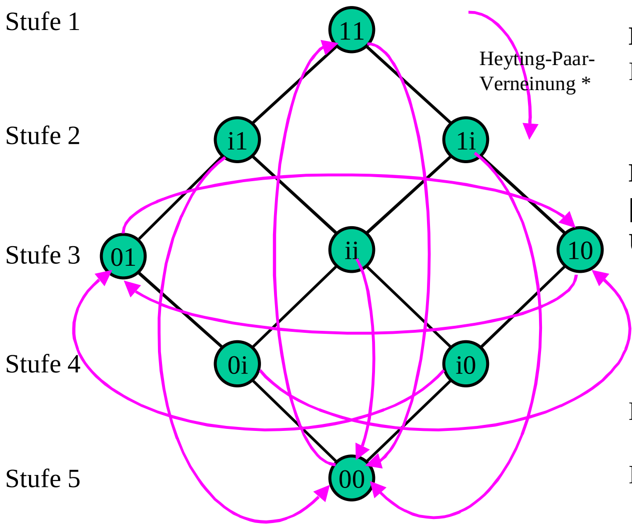
Sei ($\mathbf{B}$, $\leq$; $...^H$, +, $\bullet$, $\to_H$) dieselbe lineare 3-wertige Heyting-Algebra wie in 2.6.2.2, $\mathbf{B}=\{1, i, 0\}$ mit $0<i<1$. Wir bilden das Produkt $\mathbf{B}^2 := \{(x,y) \mid x,y\in \mathbf{B}\}$ und übertragen die Halbordnung $\leq$ sowie alle Verknüpfungen von $\mathbf{B}$ „vektoriell“ auf $\mathbf{B}^2$ durch die Definitionen

(2.6.3) DEF.:

(i)	$(x, y)\leq(u, v)$	:gdw.	$x\leq u$ und $y\leq v$
(ii)	$(x, y)^*$	:=	(x^H, y^H) («Heyting-Paar-Verneinung»)
(iii)	$(x, y)+(u, v)$	:=	$(x+u, y+v)$
(iv)	$(x, y)\bullet(u, v)$	:=	$(x\bullet u, y\bullet v)$
(v)	$(x,y)\rightarrow(u, v)$	:=	$(x\to_H u, y\to_H v)$

Damit bekommen wir in natürlicher Weise eine ***nichtlineare*** $3^2=9$ –elementige Heyting-Algebra ($\mathbf{B}^2$, $\leq$, *, +, $\bullet$, $\rightarrow$). $\mathbf{B}^2$ ist bzgl. der Verknüpfungen + und $\bullet$ natürlich wieder ein endlicher Verband. Seine Elemente (x, y) schreiben wir, wenn das zu keinen Missverständnissen führt, einfach als „xy“. Zum Beispiel ist dann $(0i)^* = 10$, $(i1)^* = 00$ usw...(vgl. die Abbildung).

Der Verband **B²** („Heyting-Paar“)



B={0,i,1} Heyting-Dreier-Verband

Interpretation:
1: zutreffend
i: möglich
0: unzutreffend

B²={(x,y)| x,y in {0,1}}.

|**B**²| = 3² = 9

Unvergleichbar sind: alle auf derselben Horizontale liegenden Knoten:

(i1), (1i)	unvglb.,
(01), (ii), (10)	paarweise unvglb.,
(0i), (i0)	unvglb.

Heyting-Verneinung:
$1^H=0$, $0^H=1$, $i^H=0$ (!)

Interpretationsprinzip:
„Was nicht *möglich* ist, ist *unzutreffend*“

Die Abbildung zeigt den Graphen des nichtlinearen Heyting-Verbandes, wobei die Halbordnung xy<uv durch „xy weiter unten, uv weiter oben“ sichtbar gemacht ist. ***Unvergleichbare*** Elemente liegen auf derselben Horizontalen; man könnte sie auch als „***gleichrangig***“ bezeichnen. Die roten Pfeile symbolisieren die „Heyting-Paar-Verneinung“ jedes Elements.

2.6.2.4 Anwendungsbeispiel zum Heyting-B²

Ein Manager (M) muss sich zu **zwei Aufgaben X, Y** entscheiden, welche Bewertung er ihnen für den nächsten Schritt eines Projekts beimisst. Dabei soll er die **B**-Werte

1 („*machbar*“), i („*möglicherweise machbar*“), 0 („*nicht machbar*“)

unterscheiden und dazu die 3-wertige **Heyting-Logik** (2.6.2.2) benutzen. Für das Paar $\underline{\beta}$(X,Y) := (βX, βY) gibt es dementsprechend 3²=9 Bewertungsmöglichkeiten. Die Abbildung hilft (M), das Problem erst einmal in 5 Stufen der „Machbarkeit“ einzuteilen:

vom Stufe 1 „*beides machbar*“ im günstigsten Fall
bis Stufe 5 „*keines von beiden machbar*“ im ungünstigsten Fall.

Dazwischen liegen drei Machbarkeitsstufen, bei denen entweder eine der beiden Aufgaben X, Y „*nicht machbar*“ oder mindestens eine der beiden Aufgaben nur „*möglicherweise machbar*“ ist. (M) erkennt (anhand der Abbildung) aber auch, dass es auf diesen drei Zwischenstufen „*gleichrangige*“ Bewertungen gibt. Zum Beispiel sind auf Stufe 3 die Bewertungen

(10) X „*machbar*“, Y „*nicht machbar*“
(i i) beide nur „*möglicherweise machbar*“
(01) X „*nicht machbar*“, Y „*machbar*“

ins Auge zufassen. Es ist auf dieser Stufe abzuwägen, ob man eine der beiden Aufgaben in der Einschätzung „ganz sausen lassen“ oder ob man beide Aufgaben als „*möglicherweise machbar*“ bewerten soll. Die vorgegebene Heyting-Logik allein nimmt dem Manager (M) natürlich seine letztendliche Bewertungs-Entscheidung nicht ab; (dazu muss er die Projektbedingungen heranziehen). Sie hilft ihm aber, systematischer als nur „rein intuitiv", sein Problem anzugehen – und damit Fehlurteile besser auszuschalten und Zeit zu sparen.

(Ob die Mathematiker, die sich mit Heyting-Algebren – übrigens bis heute noch – beschäftigt haben, an solche praktischen Anwendungen gedacht haben, ist mir unbekannt.)

2.6.2.5 Anmerkung zur Historie

Der Grund, warum die **Intuitionisten** die Allgemeingültigkeit des *Tertium non datur* nicht anerkennen ist **nicht** etwa der, dass die 2-Wertigkeit der (mathematischen) Logik abgelehnt würde; **für eine mehr als 2-wertige Logik plädieren die meisten Intuitionisten gar nicht;** sondern der Grund ist der, dass „$A \vee \neg A$" nicht in jedem System S für alle in S formulierbaren A zutreffe im Sinne, dass stets entweder A oder $\neg A$ „beweisbar" (herleitbar) sei. Sie wiesen besonders auf Probleme der Beweiskonstruktion hin, wenn A von **überabzählbar-unendlichen Mengen** handelt.
Insofern zählen die o.a. mehrwertigen Logiken, deren Bewertungsbereich eine endliche Heyting-Algebra mit mehr als 2 Elementen ist, eigentlich gar nicht als Argument zu Gunsten der Intuitionisten!
In den Metatheoremen zur klassischen mathematischen Logik unterscheidet man zwischen dem Begriff der ***semantischen Folgerung*** „$\Sigma \models A$" einer Aussage A aus einer Menge Σ von gültigen Aussagen und der ***Ableitbarkeit*** *(Beweisbarkeit)* „$\Sigma \vdash A$" einer Aussage A aus einer Menge Σ von gültigen Aussagen (vgl. Def.(2.4.12) und Def.(2.4.13) in Kap.2.4.2). „Ableitung" („Herleitung" / „Beweis") basiert dabei auf einer bestimmten syntaktischen Methode, um durch eine **endliche Folge** von syntaktisch korrekten Teilschritten von Σ nach A zu kommen. So eine Methode hatte z.B. *David Hilbert* (1862-1943) unter Verwendung des *Modus Ponens* angegeben. – Vgl. z.B. [Eb/Fl/Th.2007, Kap.7] oder „einfacher" dargestellt in [Fi/Vo.2003].
Die Theorie der natürlichen Zahlen (Arithmetik), die auf den *Peano*-Axiomen Σ_{PA} basiert ist widerspruchsfrei und „**vollständig**" in dem Sinne, dass ein mit den Mitteln der Prädikatenlogik 1. Stufe formulierter zahlentheoretischer Satz A genau dann aus Σ_{PA} semantisch folgt, wenn er aus Σ_{PA} *mit Hilfe der Hilbert-Methode* in endlich vielen Schritten herleitbar (beweisbar) ist. Vollständigkeit in diesem Sinne besagt: „$\Sigma \models A$ genau dann, wenn $\Sigma \vdash A$". Eine **ganz andere Frage** ist, ob von *jeder* zahlentheoretisch formulierbaren Behauptung A überhaupt entweder A oder $\neg A$ aus Σ_{PA} in endlich vielen Schritten hergeleitet in werden kann. Seit *Gödel* (1906-1978), 1931, weiß man dass es zahlentheoretisch formulierbare Sätze A geben muss, für die das nicht gilt, also „weder $\Sigma_{PA} \vdash A$ noch $\Sigma_{PA} \vdash \neg A$". Die auf den Peano-Axiomen basierende Theorie der natürlichen Zahlen ist also **in diesem zweiten Sinne „unvollständig".** Dieses Ergebnis bestärkt die Intuitionisten in ihrer Ablehnung des „*Tertium non datur*".

2.6.3 Indische Logik – Tetralemma

2.6.3.1 Einführung

Hier geht es um den Versuch, das sogenannte „**Tetralemma**" [*tetra* $_{gr.}$ = vier; *lemma* $_{gr.}$ = Annahme, Ansicht], im Sanskrit auch ***catuskoti*** (= vier Ecken) genannt, mathematisch zu modellieren durch einen ***nicht-linearen*** Boole-Verband. In der Form wie ich das hier versuche, habe ich es in der Literatur nicht gefunden. Der Grund ist vielleicht, dass das „Tetralemma" (*catuskoti*) hauptsächlich bei Indologen, Buddhologen und Therapeuten, also in nicht-mathematischen Kreisen, Beachtung findet.

Mit folgenden Worten führt *Matthias Varga von Kibéd*, [Kib.2003, S.77], der zusammen mit seiner Frau *Insa Sparrer* die **systemische Therapie** um die **„Systemischen Strukturaufstellungen"** erweitert hat, in das Thema ein:

„Das Tetralemma („vier Ecken" im Sinne von vier Positionen oder Standpunkten) ist eine Struktur aus der traditionellen indischen Logik zur Kategorisierung von Haltungen und Standpunkten. Es wurde im Rechtswesen verwendet zur Kategorisierung der möglichen Standpunkte, die ein Richter in einem Streitfall zwischen zwei Parteien einnehmen kann. Er kann der einen Partei recht geben oder der anderen Partei oder beiden (jede hat recht) oder keiner von beiden. ***...*** *Das Tetralemma ist ein außerordentlich kraftvolles allgemeines Schema zur Überwindung von „Erstarrungen" im schematischen Denken. Es stellt also eine Synthese von schematischem Denken und Querdenken auf höherer Ebene dar."*

Die Methode der 4 Positionen der *Catuskoti* ist uralt. Bereits *Siddhartha Gautama*, der *Buddha* (6. Jh. v.C.), benutzte sie immer wieder, um sowohl philosophische Ansichten als auch deren Gegenansichten, die beide seinen eigenen Erfahrungen nicht entsprachen, ad absurdum zu führen.

Später verwendete sie der buddhistische Erneuerer und „Wiederhersteller der Lehre Buddhas“, *Nâgârjuna* (ca. 2. Jh. n.C.), ausgiebig, ging aber schließlich über die 4 Positionen hinaus mit einer 5. Position, die manchmal als „*Nâgârjuna-Schritt*“ bezeichnet wird – vgl. [Ga/Pr.2004] ; weiteres: siehe 2.6.3.7.

Anmerkung: Alle heutigen (westlichen) Interpretationsversuche von antiken Texten, die angeblich die *Catuskoti* benutzen, sind mit Vorsicht zu genießen, denn für eine angemessene Deutung müsste man sich in die altertümliche Denkweise der antiken östlichen Philosophen noch besser einfühlen können; sie erschließt sich leider nicht ganz aus den antiken Sprachen (Pâli, Prakrit, Sanskrit, ...), welche – so hat man beim Lesen oft den Eindruck – der revolutionären Denkweise dieser Großen gar nicht gewachsen waren. Andererseits kann man *Buddha* und *Nâgârjuna* den fähigen Umgang mit einer gewissen „Logik“ nicht absprechen; dazu gibt es zu viele schlagende Textbeispiele aus dem *Ti Pitaka* (dem theravâda-buddhistischen „Dreikorb“) und den überlieferten Schriften des *Nâgârjuna*, die einen äußerst eleganten Umgang mit „Logik“ verraten.

2.6.3.2 Interpretationsversuche

Das Tetralemma oder *catuskoti* wird meist kurz in folgender Form zitiert:

„das Eine“	Position des Proponenten (A)
„das Andere“	Gegenposition des Opponenten (B)
„Beides“	inklusive Schlichterposition (C)
„keines von beiden“	exklusive Schlichterposition (D)

Zwei Kontrahenten (A), (B) streiten sich und gehen vor einen Richter / Schlichter. Abgesehen von dem „Trivialfall“, dass der Schlichter einem von beiden recht geben kann, ist eventuell aber auch eine „inklusive“ Position (C) oder eine „exklusive“ Position (D) möglich, die dann zu einem „Kompromiss der Kontrahenten „auf höherer Einsichtsebene“ führen mag.

1. Ein erster „Deutungsversuch“ mit Hilfe der klassischen Aussagenlogik, der z.B. in [Wiki.Tet] angegeben ist, ist völlig unangemessen. Er setzt für die **Position (A)** eine Aussage A, sowie für die **Gegenposition (B)**, einfach **die Verneinung $\neg$A** – und hat damit bereits einen **Fehler** begangen, denn Position (A) und Gegenposition (B) mögen sich zwar gegeneinander ausschliessen (sonst entstünde ja kein Streit zwischen den Kontrahenten!); daraus folgt aber **nicht**, dass B die logische Verneinung von A sein muss! Hier wird „gegensätzliche Ansicht“ mit „verneinte Ansicht“ verwechselt. Weiter wird das „*beides*“ der **Schlichterposition (C)** mit $A\wedge B$, also mit $A\wedge\neg A$ interpretiert; das ist ein Widerspruch in sich nach klassischer Logik, der aber einem klugen Richter sicher nicht zugemutet werden sollte. – Mit „*beides*“ könnte nämlich auch $A\vee B$ gemeint sein. Die **Schlichterposition (D)** „keines von beiden“ wird schließlich mit $\neg A\wedge\neg B$, also mit $\neg A\wedge A$ interpretiert; – derselbe Widerspruch in sich, der, wie gesagt, dem klugen Richt nicht zugemutet werden sollte. Mit „keines von beiden“ könnte aber auch $\neg A\vee\neg B$ gemeint sein. Dieser Versuch, das Tetralemma so mit der klassischen Aussagenlogik „interpretieren“ zu wollen, **scheitert daher total**. **Das liegt aber nicht am Sinn des Tetralemma, sondern an der unangemessenen westlichen „Interpretation“** in [Wiki.Tet].

2. Eine zweite Deutung, die in [Wiki.Tet] angegeben wird, kommt der Sache schon näher: Ich will sie hier – ebenfalls mit Hilfe der **klassischen Logik**, aber unter Einsatz des Quantors $\exists$ – erläutern und auch die beiden Schlichterpositionen rechtfertigen. Sei R eine beliebige 2-stellige Relation auf einer Objektmenge M, also $R\subseteq M\times M$. x, y, z seien Variablen auf M. Für die Aussageform „$(x,y)\in R$“ schreibt man auch „R(x,y)“. Definiert man, um die **Reflexivitätsbereiche** von R zu untersuchen, die Aussageform $\delta(x)$ durch

$$\delta(x) := \exists y:[R(x,y)\wedge y\neq x],$$

so gehörten zu R die folgenden Teilmengen vom M:

$$M1(R) := \{x\in M \mid R(x,x) \wedge \neg\delta(x)\}$$
$$M2(R) := \{x\in M \mid \neg R(x,x) \wedge \delta(x)\}$$
$$M3(R) := \{x\in M \mid R(x,x) \wedge \delta(x)\}$$
$$M4(R) := \{x\in M \mid \neg R(x,x) \wedge \neg\delta(x)\} = \{x\in M \mid \neg\exists z:R(x,z)\}$$

R erzeugt in dieser Weise eine **Partition** auf M, denn es gilt

(*) $M1(R)\cup M2(R)\cup M3(R)\cup M4(R)= M$ und

(**) $Mi(R)\cap Mj(R) = \emptyset$ für alle $i, j \in\{1, 2, 3, 4\}$ mit $i\neq j$

Das Tetralemma kann nun in folgender Weise interpretiert werden:

Position (A):	„Das Eine“,	wobei A=A(x) heißt: „$x\in M1(R)$“
Gegenposition (B)	„das Andere“,	wobei B=B(x) heißt: „$x\in M2(R)$“

Schlichterposition (C) „beides", wobei C=C(x) heißt: „$x \in M3(R)$"
Schlichterposition (D) „keines von beiden" wobei D=D(x) heißt: „$x \in M4(R)$"

Einige der Mengen Mi(R) können **leer** sein – und genau das ist hier im „Tetralemma" zu diskutieren.
Es gilt aber stets (*) und (**).

Anwendung auf die in einem Rechtsstreit benutzte Tetralemma-Methode: Entweder stellt der Richter $M2(R)=\emptyset$ fest; dann wird er der Position (A) recht geben. Oder er stellt $M1(R)=\emptyset$ fest; dann wird er der Gegenposition (B) recht geben. Oder er stellt $M1(R)\neq\emptyset$ und $M2(R)\neq\emptyset$ fest; dann wird er die Schlichterposition (C) einnehmen. Oder er stellt $M1(R)=M2(R)=\emptyset$ fest; dann wird er die Schlichterposition (D) einnehmen.

3. Eine dritte Deutung habe ich in [Ga/Pr.2004] gefunden. Dort fassen die Autoren die *catuskoti* zwar auch (so wie ich es vorhabe) als 4-elementigen mit einer Involution * ausgestatteten **Verband** (B, *, +, •) auf mit B={1, b, n, 0} und 0=infB, 1=supB, wobei offensichtlich 1 für „das Eine", 0 für „das Andere", b für „Beides" und n für „keines von beiden" stehen soll. Aber dieser ist ***kein*** Boole-Verband, da für den „Verneinungsoperator" * gelten soll: b*=b, n*=n. Das heißt, dass die Teilmengen {0, b, 1} und {0, n, 1} Teilverbände von der *Kleene*-schen Struktur $\mathbf{K_3}$ sind (vgl. hier 2.6.1.1). Diese Deutung ist aber nicht vereinbar mit der von *Matthias Varga von Kibéd*, [Kib.2003, S.77], die oben in 2.6.4.1 zitiert wurde und welche die Situation eines Schlichters in einem Rechtsstreit zweier Kontrahenten richtig beschreibt. – Wir kommen ggf. später in 2.6.3.7 auf die dritte Deutung aus [Ga/Pr.2004] zurück.

Ich hingegen möchte mich der Deutung von *Kibéd* anschließen und das Tetralemma **ganz aus der klassischen Logik her begründen** und komme daher für die *catuskoti-Logik* auf den **Boole-schen 4-er-Verband** (vgl. hier 2.6.3.4), weil sich damit eine ganz natürliche Verallgemeinerung vom „Tetralemma" (für **n=2** Kontrahenten) zum „2^n-Lemma" ergibt, bei dem ein Schlichter ein Urteil / eine Einigung von **n** Positionen herbeiführen muss.

2.6.3.3 Alternativer Formalisierungsvorschlag zum Tetralemma

Problematisch bei der Deutung 1 (s.o. 2.6.4.2) war das „*beides*" und auch das „*keines von beiden*" der Schlichterpositionen (C) und (D): Die Frage war nämlich, ob man das mit „*und*" ($\wedge$) oder mit „*oder*" ($\vee$) interpretieren soll.

Von „Relationen" (Deutung 2, s.o. 2.6.4.2) ist bei traditionellen Anwendungen des Tetralemma nicht explizit die Rede, aber die „4-er-Position" bleibt dieselbe:

Ich stelle deshalb eine Modellierung vor, die auf der klassischen 2-wertigen Aussagelogik basiert, die aber die „*und/oder*-Problematik der Deutung 1 einfach **umgeht:**

Der Proponent (A) vertrete die Ansicht A, der Opponent (B) die Ansicht B. Ein jeder Schlichter/Richter muss im Streit *zweier* Kontrahenten, ausgehend von *zwei* Wahrheitswerten 1 („wahr"), 0 („falsch"), stets 2^2=4 Bewertungsmöglichkeiten β_1,.., β_4 ins Auge fassen, um ein Urteil fällen zu können – alles ganz „normal" nach der klassischen 2-wertigen Aussagenlogik **(P, {0,1}, $\boldsymbol{\gamma}$)**:

1. Möglichkeit β_1: Proponent (A) hat recht, Opponent (B) hat unrecht:
   $\beta_1(A)=1$, $\beta_1(B)=0$
2. Möglichkeit β_2: Proponent (A) hat unrecht, Opponent (B) hat recht:
   $\beta_2(A)=0$, $\beta_2(B)=1$
3. Möglichkeit β_3: Beide, Proponent (A), Opponent (B), haben recht:
   $\beta_3(A)=1$, $\beta_3(B)=1$
4. Möglichkeit β_4: Keiner der beiden hat recht:
   $\beta_4(A)=0$, $\beta_4(B)=0$

Es handelt sich also um die 4 möglichen Bewertungen (Belegungen) eines **Paares (A,B) von Aussagen.** Mit der **Paar-Schreibweise** wird nun alles klar:

Möglichkeit β_1: (A) hat recht, (B) hat unrecht.
Schlichterurteil: $\underline{\beta}_1(A,B):=(\beta_1 A, \beta_1 B)=(1, 0)$

Möglichkeit β_2: (A) hat unrecht, (B) hat recht.
Schlichterurteil: $\underline{\beta}_2(A,B):=(\beta_2 A, \beta_2 B)=(0, 1)$

Möglichkeit β_3: Beide haben recht:
Schlichterurteil: $\underline{\beta}_3(A,B):=(\beta_3 A, \beta_3 B)=(1, 1)$

Möglichkeit β_4: Keiner der beiden hat recht:
Schlichterurteil: $\underline{\beta}_4(A,B):=(\beta_4 A, \beta_4 B)=(0, 0)$

Statt der formalen Sprache **P** der „Aussagesymbole" haben wir es hier mit der **Paarmenge $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}\times\mathbf{P}$** zu tun. Ein Paar $(X,Y)\in\mathbf{P}^2$ nenne ich eine **„Äußerung"** (oder auch ein „Urteil") und bezeichne sie mit einem unterstrichenen Buchstaben, etwa $\underline{A}=(X,Y)$. Dabei ist kein Problem beim Aufbau, wenn man von vorneherein auch die **EA-Zeichen** für $\mathbf{P}^2$ als *Paare* versteht und jeden 1-stelligen bzw. 2-stelligen Junktor $\alpha\in$ **J1** bzw. $\varphi\in$ **J2** auf Paare so wirken lässt:

$$\alpha(X,Y):= (\alpha X, \alpha Y);\ (X,Y)\varphi(X',Y'):= (X\varphi X', Y\varphi Y').$$

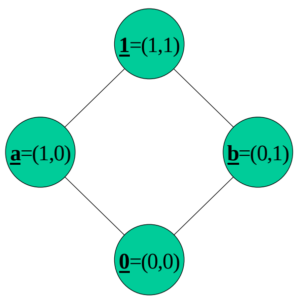
Aus einer gegebenen Aussagenlogik **(P,B,γ)** wird somit in natürlicher Weise die „**Paarlogik**" **($\mathbf{P}^2$,$\mathbf{B}^2$,γ)**

2.6.3.4 Bewertungsbereich zum Tetralemma

Ausgangspunkt ist der **Boolesche 2-er-Verband** $(B=\{0,1\},\leq, *, +,\bullet)$, also der Bewertungsbereich der **klassischen 2-wertigen Logik**. Daraus bilden wir die Struktur $\mathbf{B}^2:=B\times B$, wobei die Halbordnung und die Verknüpfungen „vektoriell" von B auf $\mathbf{B}^2$ übertragen werden durch die Definitionen für alle $x, y, u, v\in B$:

(2.6.1) DEF.

$(x,y)\leq(u,v)$:gdw. $x\leq u$ und $y\leq v$
$(x,y)^* := (x^*,y^*)$
$(x,y)+(u,v) := (x+u,y+v)$
$(x,y)\bullet(u,v) := (x\bullet u,y\bullet v)$



Der 4-elementige Boole-Verband $\mathbf{B}^2$

(2.6.2) $\mathbf{B}^2$ ist, wie man sofort sieht, ebenfalls ein **Boolescher Verband $\mathbf{B}^2=\{\underline{1}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{0}\}$** mit den $2^2=4$ Elementen

(i) $\underline{1}:=(1,1)$, $\underline{a}:=(1,0)$, $\underline{b}:=(0,1)$, $\underline{0}:=(0,0)$**.** (vgl. die Figur)

Wir nennen ihn den **Boole-schen Viererverband.** In $\mathbf{B}^2$ gelten für alle $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\in\mathbf{B}^2$ – wie in *jedem* Booleverband – die Gesetze:

(ii) Der Negationsoperator * ist auf $\mathbf{B}^2$ wieder eine „die Halbordnung respektierende" Involution: $\underline{x}^*\neq\underline{x}$, $\underline{x}^{**}=\underline{x}$ und $\underline{x}\leq\underline{y}$ gdw. $\underline{y}^*\leq\underline{x}^*$.

(iii) Es gilt für alle $\underline{x}\in\mathbf{B}^2$: $(\underline{x}\bullet\underline{x}^*)^* = \underline{x}+\underline{x}^* = \underline{x}\rightarrow\underline{x} =\underline{1}$ **,**
wobei „$x\rightarrow y$" durch x^*+y definiert ist,

(iv) $(\underline{x}+\underline{y})^*=\underline{x}^*\bullet\underline{y}^*$, $(\underline{x}\bullet\underline{y})^*=\underline{x}^*+\underline{y}^*$ (De-Morgan-1 und 2), sowie

(v) $\underline{x}+(\underline{y}\bullet\underline{z})=(\underline{x}+\underline{y})\bullet(\underline{x}+\underline{z})$, $\underline{x}\bullet(\underline{y}+\underline{z})=(\underline{x}\bullet\underline{y})+(\underline{x}\bullet\underline{z})$ (gegenseitige Distributivität für + und •).

Insbesondere haben wir:

(vi) $\underline{1}^*=\underline{0}$, $\underline{0}^*=\underline{1}$, $\underline{a}^*=\underline{b}$, $\underline{b}^*=\underline{a}$

(vii) $\underline{1}+\underline{x}= \underline{a}+\underline{b}=\underline{1}$ und $\underline{0}\bullet\underline{x}=\underline{a}\bullet\underline{b}=\underline{0}$ für alle $x\in\mathbf{B}^2$

(viii) $\underline{0}<\underline{a}<1$, $\underline{0}<\underline{b}<\underline{1}$, aber $\underline{a}$, $\underline{b}$ *unvergleichbar*.

Die Verknüpfungstabellen lauten dann so:

Der Verneinungsoperator $\underline{x}^*$=?

$\underline{x}$	$\underline{0}$	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{1}$
$\underline{x}^*$	$\underline{1}$	$\underline{b}$	$\underline{a}$	$\underline{0}$

Der „oder"-Operator $\underline{x}$+$\underline{y}$=?

ok		y	y	y	y
	x+y	1	a	b	0
x	1	1	1	1	1
x	a	1	a	1	a
x	b	1	1	b	b
x	0	1	a	b	0

Der „und"-Operator $\underline{x}$•$\underline{y}$ =?

ok		y	y	y	y
	x•y	1	a	b	0
x	1	1	a	b	0
x	a	a	a	0	0i
x	b	b	0	b	0
x	0	0	0	0	0

Der „wenn..dann.." Operator x→y=?

ok		y	y	y	y
	x*+y	1	a	b	0
x	1	1	a	b	0
x	a	1	1	b	b
x	b	1	a	1	a
x	0	1	a	b	1

B² nehmen wir nun als Bewertungsbereich für die Paarlogik (P², B², γ) im Tetralemma, wobei für jede beliebige Bewertung β**: P→B** die Paarbewertung $\underline{\beta}$:**P²→B²** definiert wird durch

(ix) $\underline{\beta}$(X, Y):= (βX, βY) für alle X,Y∈**P**

Dann gilt mit den Bezeichnungen $\underline{F}$:=(X,Y), $\underline{G}$:=(U,V) für X,Y,U,V∈**P**:

(x) $\underline{\beta}$(¬$\underline{F}$) = (β(¬X), β(¬Y)) = ([βX]*, [βY]*) = [β$\underline{F}$]*

(xi) $\underline{\beta}$($\underline{F}$∨$\underline{G}$) = (βX+βU, βY+βV) = β$\underline{F}$+β$\underline{G}$

(xii) $\underline{\beta}$($\underline{F}$∧$\underline{G}$) = (βX•βU, βY•βV) = β$\underline{F}$•β$\underline{G}$

In dieser Weise wird die klassische 2-wertige Logik in natürlicher Weise auf die **Paarlogik (P², B², γ)** übertragen: In **(P², B², γ)** gelten

- die Tautologien des „*tertium non datur*", des „*Satzes vom Widerspruch*" und der „*trivialen Implikation*" (¬$\underline{X}$∨$\underline{X}$, ¬(¬$\underline{X}$∧$\underline{X}$) und $\underline{X}$⇒$\underline{X}$ haben bei allen Bewertungen den höchsten Wert $\underline{1}$);
- die doppelte Negation ist stets allgemeinäquivalent zur Affirmation (¬¬$\underline{X}$≅$\underline{X}$ für alle $\underline{X}$).

Man beachte aber, dass die Junktoren ¬, ∧, ∨ in **P²** nicht einfach wie das „*nicht*", das „*und*" bzw. das „*oder*" der einfachen Aussagenlogik **P** zu lesen sind, sondern dass diese Interpretation eben nur für die **beiden Glieder** X, Y eines Paares $\underline{F}$=(X,Y) zulässig ist. Bei Nichtbeachtung kommt es zu Missdeutungen, wie z.B. in [Wiki.Tet].

Ebenso sollten die Werte $\underline{1}$=(1,1) bzw. $\underline{0}$=(0,0) nicht als „*wahr*" bzw. „*falsch*" interpretiert werden, sondern in der antiken Sprechweise des Tetralemma eben nur als „*beides*" bzw. „*keines von beiden*". Um „wahr" / „falsch" bzw. „Recht haben" / „Unrecht haben" geht es zwar bei den „Aussagen" (den Komponenten von Paaren), nicht aber bei den „Äußerungen" (den Paaren selbst) [24]

[24] In [Go.1989, S.181] habe ich übrigens (am 17.8.2011) die Verknüpfungstabellen zum Booleschen B² wiedergefunden. *Gottwald* bezeichnet eine Aussagenlogik, deren Bewertungsbereich ein Kartesisches Produkt linearer Bewertungsbereiche ist, als „mehrdimensional". Er geht aber dort nicht auf Anwendungsmöglichkeiten wie etwa das Tetralemma ein.

2.6.3.5 Ansichten und Einsichten im Tetralemma

Das Tetralemma unterstützt einen Schlichter, nicht nur einem der beiden streitenden Kontrahenten eventuell „recht" zu gegeben, sondern gegebenenfalls – nämlich, wenn so ein „entweder-oder Recht-geben" gar nicht möglich ist – *beiden* Kontrahenten zu einer „höheren Einsicht" zu verhelfen – nämlich zu einer „inklusiven Einsicht", (C) (*„beide"*), oder gar zu einer „exklusiven Einsicht", (D) (*„keine von beiden"*), – die dann zu einem Kompromiss im Rechtsstreit führen mag.

$\mathbf{B}^2$ teilt sich in zwei fremde Teilmengen auf

Ans($\mathbf{B}^2$) := {$\underline{x} \in \mathbf{B}^2$ **|** es gibt $\underline{y} \in \mathbf{B}^2$, so dass $\underline{x}$ mit $\underline{y}$ *unvergeichbar* ist}

Eins($\mathbf{B}^2$) := {$\underline{x} \in \mathbf{B}^2$ **|** alle $\underline{y} \in \mathbf{B}^2$ sind mit $\underline{x}$ *vergleichbar*}

Offensichtlich ist Ans($\mathbf{B}^2$)={$\underline{a}$, $\underline{b}$} und Eins($\mathbf{B}^2$)={$\underline{1}$, $\underline{0}$}

Sei nun $\underline{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{:P^2 \to B^2}$ irgendeine **Belegung**, die im folgenden **festgehalten** wird. Dann kann man $\mathbf{P}^2$ in entsprechende fremde Teilmengen einteilen:

$\mathbf{Ans_\beta}$:={$\underline{X} \in \mathbf{P}^2$ **|** $\underline{\beta X} \in$ {$\underline{a}$, $\underline{b}$}} und
$\mathbf{Eins_\beta}$:={$\underline{Y} \in \mathbf{P}^2$ **|** $\underline{\beta Y} \in$ {$\underline{1}$, $\underline{0}$}}, also
$\mathbf{P^2 = Ans_\beta \cup Eins_\beta}$, $\mathbf{Ans_\beta} \cap \mathbf{Eins_\beta} = \varnothing$

Die $\underline{X} \in \mathbf{Ans_\beta}$ nenne ich „**Ansichten**" (Meinungen), die $\underline{Y} \in \mathbf{Eins_\beta}$ nenne ich „**Einsichten**" der Bewertung β. Seien $\underline{A}$, $\underline{B}$ Äußerungen mit $\beta\underline{A}=[\beta\underline{B}]^*$, so nenne ich $\underline{B}$ eine **Gegenäußerung** von $\underline{A}$ und (wegen $\neg\neg\underline{X} \cong \underline{X}$) auch $\underline{A}$ eine **Gegenäußerung** von $\underline{B}$. Insbesondere ist dann $\neg\underline{A}$ eine Gegenäußerung von $\underline{A}$ (und umgekehrt). Vermöge der Struktur von $\mathbf{B}^2$ gilt: Zu jeder **Ansicht** $\underline{A} \in \mathbf{Ans_\beta}$ sind ihre Gegenäußerungen ebenfalls **Ansichten**; zu jeder **Einsicht** E$\in \mathbf{Eins_\beta}$ sind ihre Gegenäußerungen ebenfalls **Einsichten**. Es gilt also: $\neg\underline{X} \in \mathbf{Ans_\beta}$ für alle $\underline{X} \in \mathbf{Ans_\beta}$ und :$\neg\underline{Y} \in \mathbf{Eins_\beta}$ für alle Y$\in \mathbf{Eins_\beta}$; d.h. $\mathbf{Ans_\beta}$ enthält mit jeder **Ansicht** $\underline{X}$ auch deren **Gegenansichten,** und $\mathbf{Eins_\beta}$ enthält mit jeder **Einsicht** $\underline{Y}$ auch deren **Gegeneinsichten.** Einsichten unterteile ich noch mal so:

Ist $\underline{\boldsymbol{\beta}X}$=0, so nenne ich $\underline{X}$ eine **„exklusive Einsicht"**;
ist $\underline{\boldsymbol{\beta}Y}$=1, so nenne ich $\underline{Y}$ eine **„inklusive Einsicht"**

Daraus ergeben sich für die **Äußerungen** von $\mathbf{P}^2$ folgende Interpretationen:

(i) Ist $\underline{X}$ eine **Ansicht** (Meinung), so ist jede **Gegenansicht** dazu äquivalent zu $\neg\underline{X}$.

(ii) Ist $\underline{X}$ eine **Ansicht**, $\underline{Y}$ eine **Gegenansicht** dazu, so sind $\underline{X}\vee\underline{Y}$ und $\underline{X}\wedge\underline{Y}$ **Einsichten** und zwar ist $\underline{X}\vee\underline{Y}$ eine **inklusive**, $\underline{X}\wedge\underline{Y}$ eine **exklusive Einsicht**.

(iii) Sind $\underline{X}$,$\underline{Y}$ **Einsichten**, so sind auch $\underline{X}\vee\underline{Y}$, $\neg\underline{X}\vee\underline{Y}$, $\underline{X}\vee\neg\underline{Y}$ und $\neg\underline{X}\vee\neg\underline{Y}$, sowie $\underline{X}\wedge\underline{Y}$, $\neg\underline{X}\wedge\underline{Y}$, $\underline{X}\wedge\neg\underline{Y}$ und $\neg\underline{X}\wedge\neg\underline{Y}$ **Einsichten**.

(iv) Ist $\underline{X}$ eine **inklusive Einsicht**, so ist auch $\underline{X}\vee\underline{Y}$ eine **inklusive Einsicht** für alle Äußerungen $\underline{Y}$.

(v) Ist $\underline{X}$ eine **exklusive Einsicht**, so ist auch $\underline{X}\wedge\underline{Y}$ **eine exklusive Einsicht** für alle Äußerungen $\underline{Y}$.

(vi) Für jede Äußerung $\underline{X}$ ist $\underline{X}\vee\neg\underline{X}$ eine **inklusive**, $\underline{X}\wedge\neg\underline{X}$ eine **exklusive Einsicht**.

(vii) Die Implikation $\underline{X}\Rightarrow\underline{Y}$ ist eine **Einsicht**,
- wenn Prämisse $\underline{X}$ und Konklusion $\underline{Y}$ beides **Einsichten** sind;
- oder wenn $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ **äquivalente Äußerungen** sind.

(viii) Die Implikation $\underline{X}\Rightarrow\underline{Y}$ ist eine **Ansicht**,
- wenn die Prämisse $\underline{X}$ eine **Einsicht**, aber die **Konklusion** $\underline{Y}$ eine **Ansicht** ist;
- oder wenn Prämisse $\underline{X}$ und Konklusion $\underline{Y}$ zueinander **nicht-äquivalente Ansichten** sind;
- oder wenn die Prämisse $\underline{X}$ eine **Ansicht** und die Konklusion Y eine **exklusive Einsicht** ist.

2.6.3.6 Anwendungsbeispiel

Ein Geschäftsmann (G) bekommt einen „*burn-out*", weil er es nicht fertig bringt, die Alternativen X = „*sich der Familie zu widmen*", Y = „*sich im Beruf einzusetzen*", zu vereinbaren, denn er verbindet X unwillkürlich mit $\neg$Y und $\neg$X unwillkürlich mit Y. Es ringen in ihm also die beiden Komponenten des Gesamtproblems $\underline{G}$:=(X,Y), das er entweder mit $\underline{\beta_1 G}$=(1,0) oder mit $\underline{\beta_2 G}$=(0,1) bewertet; und das macht ihn fertig. Er geht zu einem Therapeuten. Im Verlauf des Therapieprozesses sieht (G) folgende Möglichkeiten ein: Eine inklusive Einsicht $\underline{\beta_3 G}$=(1,1) und eine exklusive Einsicht $\underline{\beta_4 G}$=(0,0). Die Einsicht $\underline{\beta_3}$ ist die „bürgerliche", die Einsicht $\underline{\beta_4}$ ist die „unbürgerliche", die man auch als „Aussteiger-Einsicht" bezeichnen könnte. (G) mag sich schließlich z.B. für die Bewertung $\underline{\beta_3}$ entscheiden.

Anmerkung: Dasselbe Beispiel kann man auch *ganz* in der Sprache **P²** ausdrücken, *ohne Bewertungen* (Belegungen $\underline{\beta}$) *explizit zu notieren*: Die Alternativen X, Y seien wie oben. Wir setzen jetzt $\underline{A}$:=(X,$\neg$Y), $\underline{B}$:=($\neg$X,Y). $\underline{A}$ und $\underline{B}$ sind also die beiden „entweder-oder-Ansichten", mit denen sich der Geschäftsmann (G) anfänglich herumschlägt: Es ist gemäß der Logik **(P²,B²,γ):**
(i) $\neg\underline{A} \cong \underline{B}$ und $\neg\underline{B}\cong\underline{A}$
– *unabhängig von irgendeiner Bewertung β.*

(Anders ausgerückt: Bei einer anfänglichen Bewertungsmöglichkeit β_1 mit β_1X=β_1Y=1 oder auch der „gegenteiligen" Bewertungsmöglichkeit β_2 mit β_2X=β_2Y=0 sind die beiden Urteile $\underline{A}$:=(X,$\neg$Y), $\underline{B}$:=($\neg$X,Y) für (G) ***unvergleichbar*** (man kann auch sagen „*gleichrangig*") – ganz im Sinne der Struktur des Booleschen Viererverbandes!).

Im Verlauf der Therapie kommt (G) zur inklusiven Einsicht $\underline{C}$:=$\underline{A}\vee\underline{B}$ („*beides*") bzw. sogar zur exklusiven Einsicht $\underline{D}$:=$\neg\underline{A}\wedge\neg\underline{B}$ („*keines von beiden*"). Nach der obigen Erzählung hat sich der Geschäftsmann mit Hilfe der Therapie für die Einsicht $\underline{C}$ entschieden. – Man beachte, dass wegen (i) gilt
(ii) $\underline{D} = \neg\underline{A}\wedge\neg\underline{B} \cong \underline{A}\wedge\underline{B} \cong \neg(\underline{A}\vee\underline{B})\cong \neg\underline{C}$
Statt durch $\neg\underline{A}\wedge\neg\underline{B}$ darf man (hier wegen (i)) die Einsicht $\underline{D}$ auch durch $\underline{A}\wedge\underline{B}$ ausdrücken.

2.6.3.7 Der Nâgârjuna-Schritt

Bleiben wir noch eine Weile beim Beispiel 2.6.3.6: Die Ausgangsbelegung $\underline{\beta}$ des Geschäftsmannes (G) war $\underline{\beta A}$=(1,0)=$\underline{a}$ und $\underline{\beta B}$=(0,1)=$\underline{b}$, womit $\underline{A}$ und $\underline{B}$ als **Ansicht** und **Gegenansicht** gekennzeichnet sind. Mit derselben Belegung $\underline{\beta}$ folgt damit $\underline{\beta C}$ =

$\underline{\beta}(\underline{A}\vee\underline{B}) = \underline{\beta A}+\underline{\beta B} = (1,1)=\underline{1}$, $\underline{\beta D}=\underline{\beta}(\neg\underline{C})=[\underline{\beta C}]^*=(0,0)=\underline{0}$, womit $\underline{C}$ und $\underline{D}$ als **Einsicht** und **Gegenseinsicht** gekennzeichnet sind.

Im Lauf der Zeit – nach der ersten Therapie – mag etwas eintreten, was man in der Systemischen Strukturaufstellung manchmal ein „*Refraiming*" nennt: Der Geschäftsmann (G), der sich nach der ersten Therapie ja für $\underline{C}$ entschieden hat, gibt dieser Entscheidung eine *neue Bewertung* mit der Belegung $\underline{\beta'C}$:=(1,0)=$\underline{a}$; damit wird $\underline{\beta'D}$=(0,1)=$\underline{b}$. Die bisherigen **Einsichten** $\underline{C}$, $\underline{D}$ werden damit zu neuen *unvergleichbaren*(„unvereinbaren" / „*gleichrangigen*") **Ansichten**. Mit der neuen Bewertung $\underline{\beta}'$ könnte (G) wieder in einen Konflikt, diesmal zwischen $\underline{C}$ und $\underline{D}$ geraten, was im Extremfall einen erneuten Gang zum Therapeuten erforderlich machen und „neue Einsichten" $\underline{E} :\cong \underline{C}\vee\underline{D}$, $\underline{F}\cong :\neg\underline{C}\wedge\neg\underline{D} \cong \underline{C}\wedge\underline{D}$ zur Folge haben könnte ... usw. usf.

Man sieht, das könnte beliebig so weitergehen, **ohne wirklich was neues zu bringen**, denn es ist $\underline{E} \cong \underline{C}\vee\underline{D} \cong \underline{A}\vee\underline{B} \cong \underline{C}$, $\underline{F} \cong \underline{C}\wedge\underline{D} \cong \underline{D}$.

Diesen endlosen Kreislauf hat bereits der mittelindisch-buddhistische Philosoph ***Nâgârjuna*** (ca. 2. Jh. n.C.) durchschaut. Über die *catuskoti* hinaus setzte er daher einen „***fünften Schritt***", den er mit

„weder dies noch das noch beides noch keines von beiden"

beschrieb, und der heute im Mâhâyana-Buddhismus als **„Nâgârjuna-Schritt"** bekannt ist.

Dieses Hinausgehen über alle 4 Positionen der *catuskoti* hat aber auch bereits der ***Buddha* selbst** (ca. 6.Jh. v.C.) mehrfach angewendet. Beispiel aus dem theravâdischen Pâli-Kanon: [Ti Pitaka / Sutta Pitaka /Samyutta Nikâya SN 12.17], wo Buddha alle 4 Fragen des *Kassapa* zur Verursachung des *dukkha* (Pâli-Wort für „Leid" / „Unvollkommenheit) –

„selbst verursacht? / von anderen verursacht? / sowohl selbst als auch von anderen verursacht? / weder selbst noch von anderen verursacht?"

– **verneint**, weil Buddha den Kassapa darüber aufklären will, dass die in allen 4 Fragen tendenziell versteckten Grundansichten über das *dukkha* und über das menschliche Dasein zu „Extremen" (ausgedrückt in verschieden damals im Umlauf befindlichen philosophischen Spekulationen) führen, welche der Buddha auf seinem *mittleren Weg der Weisheit* vermeidet.

Kann man den *Nâgârjuna-Schritt* formalisieren?

Formalisierungsvorschlag:
Der „triviale" Verband besteht aus nur ***einem*** Element; es sei mit e bezeichnet. In ihm ist 1_e =sup{e}=inf{e}= 0_e . Ist **B²** unser Boolscher Viererverband, so gibt es genau einen Verbandshomomorphismus ω:**B²** →{e}, den „trivialen" Homomorphismus. Ist β:**P²→B²** eine beliebige Belegung, so kann man
$\omega\circ\beta$: **P²**→{e} als die „triviale Belegung" bezeichnen: Für alle Aussagesymbole der „Logik" **(P²,{e}, γ)** gibt es überhaupt nur die eine Bewertung, nämlich e.

Den „fünften Schritt" des *Nâgârjuna* kann man so interpretieren: Nâgârjuna bewertet gar nicht mehr im Viererverband **B²**, sondern **im trivialen Verband {e}**.

Die buddhistisch-philosophische Interpretation ist die mâhâyana-buddhistische Lehre von der ***LEERE***:

„*Alle Dinge sind ohne Substanz*"

(auch eben das „Ich" oder (pâli) *nâma-rûpa* oder die *pañca kkhandha* jedes einzelnen menschlichen Daseins!). **Dies ist in der Tat die Essenz, der Lehre des Buddha**, welche der große

Philosoph und Mystiker Nâgârjuna mit äußerster Prägnanz aus dem Wust scholastischer Spekulationen der vielen buddhistischen Schulen, die Buddha nicht mehr verstanden hatten, im 2.Jh.n.C. wieder hervorgeholt hat und damit der erste Patriarch der „**Zen-Richtung**“ geworden ist.

Von dieser „Übereinsicht“ her sind auch sämtliche Paradoxien, denen man in *Nâgârjunas* Texten zu begegnen scheint, zu verstehen. **Diese „Übereinsicht“** (die übrigens auch im berühmten mâhâyana-buddhistischen „*Herz-Sutra*“ klar zum Ausdruck kommt) **widerspricht allen westlichen und (christlich- oder islamisch-) dualistischen Philosophien, welche vom Aristotelischen „Substanz-Denken“ geprägt sind.** Derjenige, der eine solche „Übereinsicht“ (nicht nur mit dem Verstand sondern in der Meditation) *nachhaltig* erlangt hat, wird im östlichen Kulturraum als „erleuchtet“ bezeichnet.

Anmerkung-1: Der Nâgârjuna-Schritt wird in **[Ga/Pr.2004]** des Langen und Breiten diskutiert – durchaus zutreffend, wie ich meine. Die *catuskoti* wird dabei allerdings als Modell einer etwas anderen 4-wertigen Logik aufgefasst, die m.E. jedoch das „*beides*“ und das „*keines von beiden*“ der *catuskoti* **nicht** angemessen formalisiert, denn die Interpretation in **[Ga/Pr.2004]** respektiert nicht die durchaus bekannte und sowohl in Indien als auch im Westen praktizierte Anwendung im Rechtswesen. Für den Nâgârjuna-Schritt spielt das jedoch weniger eine Rolle.

Anmerkung-2: Der obige Formalisierungsvorschlag macht – wegen 1_e=sup{e} =inf{e}=0_e im „trivialen“ Verband {e} – auch deutlich, dass zwischen dem „*Einen*“ der indischen Adwaita-Philosophen [*a-dwaita* $=_{sskr}$ „nicht zwei“] und der „*Leere*“ der Mâhâyana-Philosophen letztendlich kein Unterschied besteht.

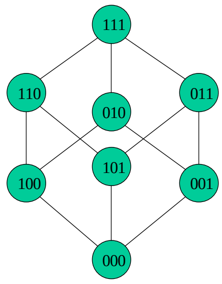
2.6.3.8 Oktolemma

Allgemeiner kann man die klassische 2-wertige Logik **(P,B={0,1},γ)** bei gegebener „Dimension“ n in natürlicher Weise auf die 2^n-wertige „n-Tupel-Logik“ **(P^n, B^n,γ)** übertragen. Dabei ist **B^n** der **2^n-elementige Boole-Verband**, für den (2.6.2) (ii) bis (v) und (ix) bis (xii) in entsprechender Weise gelten.

Anwendung: Ein Schlichter muss ein Urteil zu den Positionen von n Personen (A1), ...,(An) herbeiführen. Die Person (Aj) vertrete die Ansicht Aj (j∈{1,..,n}). Zu dem Ansichten-n-tupel <u>A</u>:=(A1,..,An) gibt es m=2^n Bewertungsmöglichkeiten (Belegungen) β_1, ... β_m. Also gibt es m=2^n Möglichkeiten $\underline{\beta}_k$(A1,..,An) := (β_kA1,..., β_kAn) (k∈{1, 2, ...,2^n}) für das Urteil des Schlichters. Damit wird aus dem „Tetralemma“ ein „2^n-Lemma“, dessen Wahrheitswerte-Verband der **Boolsche Verband B^n** ist.

Beispiel n=3: Für die Herbeiführung einer Einigung in einer Gruppe von 3 Personen (oder Instanzen oder Parteien) (A1), (A2), (A3) mit unterschiedlichen Positionen A1, A2, A3 muss der Schlichter bereits 2^3=8 Bewertungsmöglichkeiten für sein Urteil ins Auge fassen. Aus dem „Tetralemma“ wird so ein „Oktolemma“ (graphisch: ein „Achteck“, das man räumlich auch als Würfel sehen kann – vgl. die Abbildung.)

Der Boole-sche Verband B^3 (Würfel“)



B = {0,1},
B^3 = {xyz | x,y,z∈B}.
|B^3| = 2^3 = 8
Unvergleichbar sind:
3 Paare raumdiagonal
010,101 110,001 100,011
(aber 000<111 !) und
6 Paare seitendiagonal
110,010 010,011 110,011
100,101 101,001 100,001
(aber z.B. 100<111 !)

Dies gibt einen Eindruck davon, wie komplex die Aufgabe eines Schlichters bei mehr als zwei Instanzen oder Parteien werden kann.

2.7 Aussagenlogik und Metalogik

2.7.1 Einleitung

2.7.1.1 Zur Motivation

In der Diskussion mit *Peter Zahn* (2009-2010) störte ich mich daran, dass er gewisse Metaaussagen über eine Aussagenlogik **(P,B,γ)** gleichbehandelte mit Aussagesymbolen der Sprache **P** der Logik **(P,B,γ)** selbst. Darauf hin schickte er mir die Note [Zahn1.2010], in der er skizzierte, wie man die Sprache einer mehrwertigen Logik zur Sprache einer Logik erweitern könnte, die sowohl die Sprache **P** als auch gewisse Ausschnitte der beschreibenden Metasprache und der zugehörigen 2-wertigen Metalogik enthält, in der man **(P,B,γ)** definiert.

Die Note enthielt einerseits gewisse Gleichbezeichnungen, andererseits die Einführung neuer „klassischer" Junktoren; beides ließ, nach meinem Empfinden die beabsichtigte Idee nicht voll durchscheinen. Außerdem wurde die Idee im Verlauf unserer Diskussion von *P. Zahn* in Zusammenhang gebracht mit einem der Dialogik[25] ähnlichen „Behauptungsspiel", das den üblichen syntaktischen Herleitungsbegriff (Beweisbegriff) ersetzen soll. Dieses zweite eingebrachte Konzept trägt m.E. aber nicht zur klaren Darstellung der ursprünglichen Idee in [Zahn1.2010] bei, sondern ist ein davon unabhängiges Konzept zur Beweisbarkeit von Aussagen.

Durch diese Diskussion bin ich angeregt worden, die ursprüngliche Idee in [Zahn1.2010] in meiner hier entwickelten Terminologie wiederzugeben.

2.7.1.2 Zusammenfassung

Durch Einführung neuer 1-stelliger Junktoren soll aus einer mehrwertigen Logik **(P,B,γ)** – vgl. Kap.2.2 & Kap.2.3 – eine mehrwertige Logik **($P^\#$,B,$\gamma^\#$),** konstruiert werden, deren Sprache **$P^\#$** neben den Aussagesymbolen A der Objektsprache **P** auch Metaaussagen der Form „β(A) = u" bzw. „β(A) ≠ u" kodiert, wobei A irgendein Aussagesymbol der Sprache **P,** u irgendein Wert aus dem (endlichen) Bewertungsbereich **B** und β:**P**→**B** irgendeine Belegung ist.

2.7.2 Die Logik (P,B,γ) und die Metaaussagen „β(A)=u"

Sei (**P, B, γ**) eine mehrwertige Aussagenlogik, wobei die Sprache **P=[E, J1, J2]** gemäß Kap.2.2.2 rekursiv aus einer Menge **E** von EA-Zeichen (Elementaraussage-Zeichen), sowie der 1-stelligen Junktoren von **J1** und der 2-stelligen Junktoren von **J2** erzeugt wird. Der Bewertungsbereich **B** sei – gemäß meiner Präferenz in Kap.2.5.1 – ein endlicher Verband (**B,V1,V2)**, wobei die zueinander dualen Hauptverknüpfungen +, • ∈**V2**, wie üblich, definiert sind als x+y := sup{x,y}, x•y := inf{x,y} für alle x,y∈**B**. Insbesondere sind 1=sup**B**=inf∅ bzw. 0=inf**B** = sup∅ das „größte" bzw. das „kleinste" Element von **B**. Ob noch weitere 1- bzw. 2-stellige Verknüpfungen in **V1** bzw. **V2** eingeführt sind, lassen wir offen.

(1) **γ: J1∪J2 → V1∪V2**

ist die *bijektive* **Junktorenabbildung**, die jedem 1- bzw. 2-stelligen Junktor von **P**

[25] Zur Dialogik siehe hier Kap.4

eine 1- bzw. 2-stellige Verknüpfung von **B** zuordnet. Insbesondere gibt es die Junktoren $\vee$, $\wedge \in$ **J2**, für die $\gamma\vee$=+ und $\gamma\wedge$=$\bullet$ ist. Ist

(2) **β:P$\rightarrow$B**

eine beliebige **Belegung**, die nach der rekursiven Definition (2.3.2) aus einer gegebenen beliebigen Elementarbelegung $\beta°$: **E$\rightarrow$B** abgeleitet ist, so hat β die bekannten „Homomorphie-Eigenschaften"

(3) $\beta(\varphi A) = \gamma\varphi\ \beta(A)$, $\beta(A\psi B) = \beta(A)\ \gamma\psi\ \beta(B)$ für alle $\varphi\in$ **J1**, $\psi\in$ **J2** und A, B$\in$ **P**

Bei der Belegung β hat jedes A$\in$ **P** einen logischen Wert $\beta(A)\in$ **B**. Die Metaaussagen zum Sachverhalt, dass $\beta(A)$ gleich bzw. ungleich einem Wert u$\in$ **B** ist, sind

(4) „$\beta(A)=u$" bzw. „$\beta(A)\neq u$" (A$\in$ **P**, u$\in$ **B**).

2.7.3 Rekonstruktion der „Metalogik" (P$^\#$,B,$\gamma^\#$)

Um neben den Aussagesymbolen A$\in$ **P** auch die o.a. Metaaussagen der Form (4) zu integrieren, konstruieren wir aus **P** eine neue Sprache **P$^\#$.** Für jedes u$\in$ **B** definieren wir die Abbildung

(5) δ_u: **B**$\rightarrow$$\{0, 1\}$ durch $\delta_u(v)$:=1 für u=v
bzw. :=0 für u$\neq$v.

{0, 1} wird als Teilmenge von **B** aufgefasst (es sind dann 0 das „kleinste" bzw. 1 das „größte" Element des Verbandes **B**). Ob einige der δ_u schon zur Menge **V1** der 1-stelligen Verknüpfungen auf **B** zählen oder nicht, ist unwichtig.

Zum Beispiel ist dann für beliebiges w$\in$ **B**:

$\delta_0\delta_1(w) = 1$ für $\delta_1(w)=0$, also für w$\neq$1, also für w$\in$ **B**-{1}
bzw. = 0 für $\delta_1(w)\neq 0$, also für w=1

Jedes der Symbole δ_u sei zugleich der Name eines (evtll. neuen) **1-stelligen Junktors**, der vor die A$\in$ **P** gestellt werden darf. Ob die δ_u für alle u$\in$ **B** schon zur Menge **J1** der 1-stelligen Verknüpfungen auf **B** zählen oder nicht, ist unwichtig. Jedenfalls soll nun die Junktorenmenge

(6) $\Delta := \{\delta_u \mid u\in$ **B**$\}$

zu **J1** hinzukommen, und wir setzen

(7) **J1$^\#$:= J1$\cup\Delta$**

Unter Verwendung der Junktorenmengen **J1$^\#$ und J2** konstruieren wir nun aus **P** rekursiv, analog dem Vorgehen in Kap.2.2.2, die neue Sprache

(8) **P$^\#$:=[P, J1$^\#$, J2],**

wobei **P** als die Menge der neuen „EA-Zeichen" dient:

(P$^\#$1) Ist A$\in$ **P**, so soll A auch zu **P$^\#$** gehören: **P$\subseteq$P$^\#$**.
(P$^\#$2) Ist X$\in$ **P$^\#$**, $\varphi\in$ **J1$^\#$** so soll auch φX zu **P$^\#$** gehören
(P$^\#$3) Sind X,Y$\in$ **P$^\#$**, $\psi\in$ **J2** so sollen auch die Ausdrücke XψY zu **P$^\#$** gehören
Ansonsten enthalte **P$^\#$** keine weiteren Elemente.

(P$^\#$1), (P$^\#$2) besagen insbesondere, dass für beliebige A$\in$ **P,** u$\in$ **B** sowohl A als auch δ_uA zu **P$^\#$** gehören: (P$^\#$3) besagt insbesondere, dass $A\vee\delta_u B$, $A\wedge\delta_u B$ zu **P$^\#$** gehören für alle A,B$\in$ **P,** u$\in$ **B.**

Aus der mehrwertigen Logik **(P,B,γ)** konstruieren wir nun die mehrwertige Logik

(9) **(P$^\#$, B, $\gamma^\#$),**

wobei für die neue **Junktorenabbildung**

(10) $\gamma^{\#}$: $\mathbf{J1}^{\#}\cup\mathbf{J2} \rightarrow \mathbf{V1}\cup\mathbf{V2}$ gilt

(11) $\gamma^{\#}\alpha = \gamma\alpha$ für alle $\alpha\in\mathbf{J1}\cup\mathbf{J2}$

(12) $\gamma^{\#}\delta_u = \delta_u$,

wobei in (12) das δ_u links einen Junktor aus **Δ,** rechts die entsprechende in (5) definierte Abbildung δ_u:$\mathbf{B}\rightarrow\{0,1\}$ bedeutet.

Dazu haben wir zu jeder Belegung β:$\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{B}$ die Belegung

(13) $\beta^{\#}$: $\mathbf{P}^{\#}\rightarrow\mathbf{B}$

rekursiv folgendermaßen zu definieren:

($B^{\#}1$) Für alle $A\in\mathbf{P}$ sei $\beta^{\#}(A) := \beta(A)$.

($B^{\#}2$) Für alle $A\in\mathbf{P}$, $u\in\mathbf{B}$ sei $\beta^{\#}(\delta_u A) := \delta_u(\beta(A))$.

δ_u ist links ein 1-stelliger Junktor aus **Δ**, rechts die in (5) definierte Abbildung δ_u: $\mathbf{B}\rightarrow\{0, 1\}$

($B^{\#}3$) Ist $X\in \mathbf{P}^{\#}$ und $\varphi\in\mathbf{J1}^{\#}$, so sei $\beta^{\#}(\varphi X) := \gamma^{\#}\varphi(\beta^{\#}(X))$

($B^{\#}4$) Sind $X,Y\in \mathbf{P}^{\#}$ und $\psi\in\mathbf{J2}$, so sei: $\beta^{\#}(X\psi Y) := \beta^{\#}(X)\ (\gamma\psi)\ \beta^{\#}(Y)$

Die $\beta^{\#}(X)$ sind für alle $X\in\mathbf{P}^{\#}$ jedenfalls Werte im Wertebereich **B**. Speziell aber sind die $\beta^{\#}(\delta_u X)$ für alle $X\in\mathbf{P}^{\#}$ – wegen der Definition (5) – Werte im Wertebereich $\{0,1\}\subseteq\mathbf{B}$.

Die Definitionen ($B^{\#}1$) bis ($B^{\#}4$) sind korrekt, da **(B,V1,V2)** nach Voraussetzung ein endlicher **Verband** ist, und dem gemäß die Teilmenge $\{0,1\}\subseteq\mathbf{B}$ gegenüber den Hauptverknüpfungen + , • ∈ **V2** abgeschlossen ist, und da $\boldsymbol{\delta_u}$, angewendet auf Werte $v\in\mathbf{B}$, wegen (5) stets einen Wert $\boldsymbol{\gamma_u}(v)$ aus {0,1} ergibt.

($B^{\#}4$) besagt insbesondere für $A,B\in\mathbf{P}$, $u\in\mathbf{B}$:

(14)	$\beta^{\#}(A\vee\delta_u B) = \beta(A)+\delta_u\beta(B)$	$= \beta(A)+1$	$= 1$	für $\beta(B)=u$
	bzw.	$= \beta(A)+0$	$= \beta(A)$	für $\beta(A)\neq u$
(15)	$\beta^{\#}(A\wedge\delta_u B) = \beta(A)\bullet\delta_u\beta(B)$	$= \beta(A)\bullet 1$	$= \beta(A)$	für $\beta(B)=u$
	bzw.	$= \beta(A)\bullet 0$	$= 0$	für $\beta(A)\neq u$

2.7.4 Anmerkungen

Soweit ist die Sache klar, unproblematisch und bringt eigentlich nichts Neues. Wir haben mit **($\mathbf{P}^{\#}$, B, $\gamma^{\#}$),** nur den Umgang mit **Metaaussagen** der Form „$\beta(A)=u$" bzw. „$\beta(A)\neq u$" ($A\in\mathbf{P}$, $u\in\mathbf{B}$) in derselben Sprache kodiert, in der auch die Aussagesymbole A der **Objektsprache P** kodiert werden können. Denn bei beliebiger Bewertung β des Aussagesymbols A ($A\in\mathbf{P}$) bedeutet „$\beta^{\#}(\delta_u A)=1$" mit ($B^{\#}2$) nichts anderes als, dass die Metaaussage „$\beta(A)=u$" „wahr"; und „$\beta^{\#}(\delta_u A)=0$", dass die Metaaussage „$\beta(A)=u$" „falsch" ist. Was man bei der neuen Logik und Sprache noch beachten könnte, sagen die folgenden Anmerkungen.

Anmerkung-1: Beschränkt man sich bei den Aussagesymbolen der Sprache $\mathbf{P}^{\#}$ nur auf die von **P**, und bei den Junktoren nur auf $\mathbf{J1}\cup\mathbf{J2}$, so erhält man die ursprüngliche Sprache und Logik

P=[E, J1, J2], (P,B,γ).

Anmerkung-2: Beschränkt man sich bei den Aussagesymbolen der Sprache $\mathbf{P}^{\#}$ auf solche der Form $\delta_u A$, also auf die Teilsprache

$\mathbf{Q}:=\{\ \delta_u A \mid \delta_u \in\Delta,\ A\in\mathbf{P}\}$,

so ist **Q** gegenüber Anwendung aller Junktoren aus $\mathbf{J1}^{\#}\cup\mathbf{J2}$ abgeschlossen, und alle auf **Q** eingeschränkten Bewertungen $\beta^{\#}$ gehen nur in den Wertebereich {0,1}

$\beta^{\#}_{|Q}$: **Q**→{0,1}.

Damit wird

(Q,{0,1},$\gamma^{\#}$)

zur 2-wertigen Logik der **Metaaussagen** der Form „β(A)=u“ bzw. „β(A)≠u“.

Anmerkung-3: Beschränkt man sich bei der Menge der Elementarbelegungen β°: **E**→**B** auf solche $\underline{\beta}$°, die für alle a ∈ **E** nur Werte aus {0,1}⊂**B** ergeben, so ergeben auch die daraus abgeleiteten Bewertungen $\underline{\beta}$ nur Werte aus {0,1}, also

$\underline{\beta}$:**P**→{0,1}.

Denn wir haben den Bewertungsbereich gemäß unserer „Eingrenzung-1“ in (2.5.1) als endlichen **Verband** (**B,≤, +, •,..)** (mit eventuellen Zusatzverknüpfungen) vorausgesetzt. Die Verbands-Hauptverknüpfungen +, • sind aber auf {0,1} beschränkbar, d.h. {0,1} ist gegenüber +, • abgeschlossen, und ({0,1},≤, +, •) ist der übliche 2-er-Verband.

Damit bekommen wir eine 2-werige Logik

(16) **(P$^{\#}$,{0,1},$\gamma^{\#}$)**

Ist nun A ein beliebiges Aussagesymbol aus **P**, $\underline{\beta}$:**P**→{0,1} eine beliebige Belegung der eingeschränkten Belegungsmenge, so gilt mit (5) und (B$^{\#}$2):

.(17) $\underline{\beta}^{\#}(\delta_1 A)$ = 1 für $\underline{\beta}$(A)=1 und $\underline{\beta}^{\#}(\delta_0 A)$ = 1 für $\underline{\beta}$(A)=0
bzw. = 0 für $\underline{\beta}$(A)=0 bzw. = 0 für $\underline{\beta}$(A)=1

Das Zeichen δ_0 kann man also in der Logik (**P**$^{\#}$,{0,1},$\gamma^{\#}$) als **Verneinungsjunktor** ¬ in **P**$^{\#}$ und als Negationsoperator * in **B** auffassen, so dass (**B**,*,+,•) nichts anderes als die Struktur des Booleschen 2-er-Verbandes und (**P**$^{\#}$,{0,1},$\gamma^{\#}$) nichts anderes als eine **klassische 2-wertige Logik** (mit eventuellen Zusatzjunktoren) ist.

Anmerkung-4: Mit der Konstruktion **(P$^{\#}$, B, $\gamma^{\#}$),** haben wir übrigens noch ***keinerlei Designationsbereich W*** (**W⊂B, W≠∅)** für die ursprüngliche Logik **(P,B,γ)** ausgewählt, denn dass die Metaaussage „β(A)=u“ „wahr“ oder „falsch“ sei, hat nichts damit zu tun, welche Werte in **B** wir als „wahr“-Werte auszeichnen wollen.

Anmerkung-5: Soweit haben wir nur das „Syntax-“ und das „Semantik-Schema“ für die Logik **(P$^{\#}$, B, $\gamma^{\#}$)** rekonstruiert analog zu Kap.2.2 und Kap.2.3. Zu *syntaktischen Beweismethoden* entsprechend Kap.2.4.4 brauchten wir dabei ***noch nichts zu sagen***. Der obige Rekonstruktionsvorschlag ist unabhängig von der Einführung *syntaktischer Beweismethoden,* die zum Beispiel den Charakter von „Behauptungsspielen“ wie etwa bei der „Dialogik“ (vgl. Kap.4) – oder auch einen anderen, „konventionelleren“ Charakter – haben mögen.

Anmerkung-6: Diese „Spielerei“ zeigt schließlich, dass die Abgrenzung zwischen „Objektsprache“ S1 und der (sie beschreibenden) „Metasprache“ S2 eine gewisse Willkürlichkeit in sich trägt, sobald die „Objektsprache“ S1 „künstlich“ ist, in dem Sinne, dass ihre „Objekte“ nicht mehr die *außersprachlichen* „Dinge“ / „Phänomene“ sind, über welche Menschen sich verständigen, sondern selbst „Sprachobjekte“ sind: Ist S1 eine *formalisierte* Sprache (also „künstlich“), so auch ein gewisser Teil S2’ der beschreibenden Metasprache S2. Man kann die Formalisierung so ändern, dass S1 & S2’ zu einer neuen formalisierten „Objektsprache“ vereinigt werden. Dies zeigt, dass alle Sprachstufungen *oberhalb* einer „natürlichen“ Objektsprache nie absolut sondern stets aus einem bestimmten Konzept und Zweck heraus zu verstehen sind. Wenn zum Beispiel ein Informatiker behauptet, über einer natürlichen Objektsprache gäbe es nur noch 2 oder 3 Sprachstufen – vgl. etwa [W.I.O.2004] – , so hat er ein bestimmtes kommunikationstechnisches Konzept (etwa im Rahmen des Designs eines „Expertensystems“ oder einer informatischen „Ontologie“) im Sinn, das mit Computersprachen zu realisieren ist und einen bestimmten Ausschnitt aus dem „Wissen um die Welt“ formalisiert.

➔ weiter in Teil 3