← Fortsetzung von Kap.1 – Kap.3

4 Involutorische Algebren (IA) als Spezielle AMN

Wir stellen nun die in der Matrixalgebrra L(2) entdeckte "Involutorische Eigenschaft" (IA) als Axiom an die Spitze und schau'n, was raus kommt.

(IA) **Definition:** Sei A eine assoziative Algebra mit Eins 1 über einem Körper K der Charakteristik ≠ 2 mit endlichem Rang [A:K]. (A,j) heißt **Involutorische Algebra**, wenn A eine antisymmetrische Involution j mit K als Raum der Fixelemente gestattet, d.h. j hat die Eigenschaften:

(IA1) j:A→A , j(x):=x* ist linearer Verktorraumautomorphismus;

(IA2) j ist **involutorisch**: $j^2=1$, d.h. x**=x für alle x ∈ A;

(IA3) j ist "**antisymmetrisch**" bzgl. der Mutiplikation in A: (xy)*=y*x* und

(IA4) K ist Raum der **Fixelemente**: z*=z genau für z ∈ K.

x* heißt auch das zu x ***konjugierte*** Element. Betrachten wir den Ausdruck xy* + yx*, sehen wir sofort:

(4.1) b(x,y) = xy* + yx* ist eine symmetrische Bilinearform über K mit Werten in K.

Beweis: b ist K-Bilineaform, da A eine Algebra über K ist. b ist symmetrisch wegen b(y,x)= yx*+xy*=xy*+yx*=b(x,y). b ist K-wertig wegen (IA2), (IA3), (IA4): b*(x,y)= (xy*+yx*)* = (xy*)*+(yx*)* = y**x*+x**y* = yx*+xy* =b(y,x) =b(x,y); aus (IA4) folgt b(x,y) ∈ K für alle x,y ∈ A.

Damit erhalten wir den

(4.2) **Satz :** Jede IA ist eine AMN mit der multiplikativen K-wertigen Norm

(4.2a) N: x ∈ → N(x):= xx* ∈ K

und zugehörigem K-werigem Skalarprodukt

(4.2b) <x,y>:= ½ (xy* + yx*)

Beweis: <x,y> ist wegen (4.1) (und char K ≠ 2) symmetrische K-wertige Bilinearform und <x,x>=N(x) ist die quadratische Form dazu. N ist multiplikativ: N(xy) =(xy)(xy)* =xyy*x* =xN(y)x* =N(y)xy* =N(y)N(x) =N(x)N(y).

Es gelten also alle Rechenregeln und Definitionen von Kapitel 3. Für die Norm und die Involution j:x →x* gilt ferner

(4.2c) N(x*) = x*x = xx* = N(x)

Wir schauen uns noch die Einheitengruppe U, die Nullteilermenge NT den Nullkegel S, die Menge P der normregulären Elemente und das Normradikal **Rad(N)** an:

(4.3) **Satz:** **Jede IA ist eine <u>konische</u> AMN, d.h. NT = S und U = P.**

Beweis: Wegen der Formeln in Kap.3 brauchen wir nur zu zeigen, daß P ⊆U gilt. Sei also x ∈ P, d.h. N(x)≠ 0: dann können wir y:= x*/N(x) bilden, und es gilt xy=1. Da in einer Algebra MIT EINS das Inverse aus dieser Gleichung eindeutig bestimmt ist, ist $y=x^{-1}$ und damit gilt P ⊆U, womit der Satz bewiesen ist.

Für jede IA gilt also P=U und S=NT und daraus folgt

(4.4) **Corrolar**: x∈ NT ⇔ xx*=x*x=0. Jeder Nullteiler einer IA wird durch sein ***Konjugiertes*** anulliert.

Das inverse einer Einheit u schreibt sich also

(4.5) $u^{-1} = u^* / N(u)$ für alle $u \in U$

Mit (3.3) ergibt sich noch für das Normradikal die Kennzeichnung

(4.6) $r \in Rad(N) \Leftrightarrow rx^*+xr^* = 0$ für alle $x \in A$

Schließlich können wir in einer IA die Involition j: $x \rightarrow x^*$ in einfacher Weise darstellen, wenn wir die Menge

(4.7) $V := \{x \in A \mid x^* = -x\}$

einführen.

(4.7) Lemma: (a) V ist der zu 1 orthogonale K-lineare Teilraum, und
(b) A ist direkte Summe: $A = K \oplus V$.

Beweis (a): $x \in V \Leftrightarrow 0 = x^*+x = 1.x^*+x.1^* = 2\langle 1,x\rangle$, d.h. es gilt: $V = \{x \in A \mid \langle 1,x\rangle = 0\} \perp K^{\circ}$

Beweis (b): K+V ist jedenfalls direkte Summe wegen $\langle 1,1\rangle \neq 0$, denn aus y in $K \cap V$ folgt $0 = \langle 1,y\rangle = y\langle 1,1\rangle = 0 \Rightarrow y = 0$.
Da $[A:K] = \dim_K A$ *endlich* ist, kann man die Dimensionsformel $\dim K + \dim V = \dim(K+V) + \dim(K \cap V)$ anwenden:
Wegen $K \cap V = \{0\}$ folgt
(') $\dim(K+V) = \dim K + \dim V$.
Andererseits ist V der Kern der linearen Abbildung $f: A \rightarrow K$, $f(x) = \langle 1,x\rangle$, und man kann die Dimensionsformel $\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim f(A) = \dim A$ anwenden, also
('') $\dim V + \dim K = \dim A$
Aus (') und ('') folgt $\dim(K+V) = \dim A$ und damit $K+V=A$.
Anmerkung: im Trivialfall $[A:K]=1$ ergibt sich $V=\{0\}$ und damit wäre die Involution j die Identität. Ist umgekehrt j nicht die Identität, so muß A wegen (IA4) größer als K und damit $V \neq \{0\}$ sein.

Nun zur Darstellung von j (wenn wir den Trivialfall j = id einmal ausschließen): Man verifiziert sofort

(4.8) Satz: Mit der Zerlegung $A = K \oplus V$ schreibt sich jedes $x \in A$ eindeutig in der Form

(4.8a) $x = k + v \quad (k \in K, v \in V)$

und das zu x "konjugierte" Element schreibt sich

(4.8b) $j(x) = x^* = k - v$

(4.9) Corrolar: Wegen (4.7) liegt das Normradikal auf V. Wegen (4.6) ist Rad(N) gekennzeichnet durch

(4.9a) $r \in Rad(N) \Leftrightarrow rv+vr=0$ für alle $v \in V$

Schlußbemerkung. Das zu 1 orthogonale Supplement V kann man auch in einer Form darstellen, in der weder die Involution j noch die Norm N auftaucht:

(4.10) $x \in V \Leftrightarrow x^2 \in K$ und $x \notin K \setminus \{0\}$

Dies werden wir später noch brauchen.

Beweis: Daß die $x \in V - \{0\}$ diese Eigenschaft haben, verifiziert man sofort wegen $x^* = -x$, und aus $x \neq 0$, $x \perp 1$ folgt $x \notin K$. Daß umgekehrt V durch diese Eigenschaft bestimmt ist, beweist man so: Sei $x^2 \in K$ und $x \notin K\setminus\{0\}$. Wir können schreiben $x=k+v$ ($k \in K$, $k \neq 0$, $v \in V$); dann ist $x^2 = k^2+2kv+v^2 = (k^2+v^2)+2kv$; der erste Term ist in K wegen $v^2 \in K$. Aus $x^2 \in K$ folgt dann $kv=0$. Im Fall $k=0$ ist $x=v \in V$. Im Fall $v=0$ ist $x=k$; da x nicht in $K-\{0\}$, kann nur $k=0$ sein, also $x=0 \in V$. Aus der Eigenschaft folgt also in jedem Fall $x \in V$. Damit ist (4.10) bewiesen.

5 Kinematische Algebren (KA) als spezielle AMN

Wir stellen nun die in der Matrixalgebrra L(2) entdeckte "Kinematische Eigenschaft " (KA) als Axiom an die Spitze und schau'n, was raus kommt.

(KA) **Definition:** Eine assoziative Algebra mit EINS 1 über einem Körper K (char K ≠ 2, in A isomorph eingebettet) heißt **Kinematische Algebra** (KA), wenn gilt
$x^2 \in K + Kx$ für alle $x \in A$.

Wir wollen jetzt zeigen, daß "KA" dieselbe Kategorie von Algebren definiert wie "IA".

(5.1) Satz: Jede KA ist eine IA und jede IA ist eine KA.

Da jede IA eine konische AMN ist, folgt aus (5.1) sofort:

(5.2) Corrolar: Jede KA ist eine konische AMN

Beweise von (5.1): Die eine Richtung bekommt man schnell:

(5.1a) Lemma: IA ➔ KA, d.h., jede Involutionsalgebra ist kinematisch.

Beweis: Sei A eine IA und x=k+v ($k \in K$, $v \in V=1^\perp$) beliebig. Dann ist $x^2 = (k^2+v^2)+2kv$; wegen (3.10) ist $v^2 \in K$ und somit $x^2 \in K + Kx$, also A kinematisch. Q.e.d.

Der Beweis der Umkehrung ist etwas länger.

(5.1b) Lemma: KA ➔ IA, d.h. jede kinematische Algebra ist involutorisch.

Beweis: Sei also A eine KA ($x^2 \in K+Kx$ für alle $x \in A$). Die Beweisidee ist die folgende: Wir erinnern uns an die Kennzeichnung (5.10) des zu 1 orthogonalen Supplements V in einer IA und definieren entsprechend in der KA A die Menge

(5.11) $M := \{ x \in A \mid x^2 \in K \text{ und } x \notin K-\{0\} \}$

und haben zu beweisen:
(B1) M ist linearer Teilraum von A
(B2) A ist direkte Summe: A = K + M
(B3) Die Abbildung x=k+m → x'= k-m ($k \in K$, $m \in M$) ist Involution mit den IA-Eigenschaften.

Beiweis (B1):
(i) Mit $x \in M$ ist auch $kx \in M$ für jedes $k \in K$, denn $(kx)^2=k^2x^2 \in K$.
(ii) Wir haben zu zeigen, daß mit $x, y \in M$ auch $x+y \in M$, dh. daß $(x+y)^2 \in K$ ist. Im Trivialfall, daß x=0 oder y=0 ist, ist das klar.

Beweis (ii): Sei $x,y \in M$, und $x\neq0$, $y \neq 0$, also
(5.12) $x^2, y^2 \in K$ und x,y nicht in K
Fall 1: 1,x,y lin. abhängig, z.B. y=t+sx ($t,s \in K$), dann ist mit $x,y \in M$: $y^2-(sx)^2-t^2=2tsx \in K$ also ts=0; s ist ≠ 0, da y nicht in K; also t=0 und daher: $(x+y)^2 =(1+s)^2x^2$ ebenfalls in K und somit x+y in M.
Fall 2: 1,x,y lin. unabhängig: Die KA-Eigenschaft besagt, daß es zu jedem $z \in A$ Größen $a(z), b(z) \in K$ gibt mit
(5.13) $z^2 = a(z) + b(z)z$.

Wir bilden $(x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2$ $(x-y)^2 = x^2-xy-yx+y^2$
die Summe ist $(x+y)^2+(x-y)^2 = 2(x^2+y^2) \in K$ wegen $x,y \in M$
Kürzen wir $b(x+y)$ mit $b(+)$, $b(x-y)$ mit $b(-)$ ab, so folgt für die linke Seite wegen $a(x-y), a(x-y) \in K$:
(5.14) $[b(+)+b(-)]x + [b(+)-b(-)]y \in K$.

Da 1,x,y lin. unabhängig vorausgesetzt sind, folgt zum einen $x+y \notin K$ und aus (5.14): b(+)=b(-)=0, also wegen (3.13): $(x+y)^2=a(x+y) \in K$. Somit erfüllt x+y beide Bedingungen vom M. Damit ist $x,y \in M$ ➔ $x+y \in M$ bewiesen.
Also ist M linearer Teilraum von A.

Beweis (B2): Die Summe K+M ist direkt, da nach Konstruktion von M gilt: $M \cap K = \emptyset$. Es ist noch zu zeigen, daß K und M zusammen den ganzen Raum A aufspannen: also stets x=k+m ($k \in K$, $m \in M$) geschrieben werden kann.
Sei $x \in A$ beliebig und $x^2=a+bx$ ($a,b \in K$) gemäß (5.13): Wir bilden
$y := b -2x$.
Dann folgt
$y^2=b^2 - 4bx + 4x^2= b^2+4a \in K$, also $y \in M$
und somit schreibt sich x in der Form
$x =b/2 - y/2 \in K+M$
d.h., K und M spannen zusammen ganz A auf. Damit gilt
A = K + M, direkte Summe

Jedes $x \in A$ ist eindeutig in der Form $x=k+m$ ($k \in K$, $m \in M$) darstellbar. Wir wollen jetzt zeigen, daß eine multiplikative Norm existert.

Beweis (B3): Für die Abbildung
(3.15) $x=k+m \to x'=k-m$ ($k \in K$, $m \in M$)
zeigen wir die Involutionseigenschaften:

(IA1) $x \to x'$ linearer Verktorraumautomorphismus von A;
(IA2) $x \to x'$ ist involutorisch, d.h. $x''= x$ für alle $x \in A$;
(IA3) $x \to x'$ ist "anti", d.h. $(xy)' = y'x'$ und
(IA4) $x'= x$ genau für $x \in K$.

(IA1), (IA2) und (IA4) ergeben sich sofort aus der Definition (5.15) und der Zerlegung $A=K+M$. (Für (IA4) benötigt man wieder, daß char $K \neq 2$ ist). Der Beweis von (IA3) ist etwas länger.

Beweis (IA3): Für beliebiges $x=k+m$ ($k \in K$, $m \in M$) bilden wir zunächst
(5.16) $n(x):= xx' = (k+m)(k-m)=k^2-m^2$.
Aus der Definition (5.11) von M folgt $m^2 \in K$ und damit $n(x) \in K$. $n(x)$ ist also eine K-wertige quadratische Form auf A, von der wir allerdings noch nicht wissen, ob sie multiplikativ ist (dies folgt erst aus der Behauptung (IA3)).
Wir konzentrieren uns zuerst auf die M-Komponenten, wollen also zunächst
$(uv)' =?=v'u'$ für beliebige $u,v \in M$
oder, was wegen $u'=-u$ dasselbe ist,
$(uv)' =?=vu$
beweisen. Es gilt
(5.17) $n(u) = -u^2$ für alle $u \in M$

und wegen $-n(u+v)= (u+v)^2= -n(u) +uv+vu - n(v) \in K$ folgt
(5.18) $uv + vu = -n(u+v)+n(u)+n(v) =:-2<u,v>: =l \in K$ für alle $u,v \in M$, wobei $<,>$ die zu $n()$ gehörige symmetrische Bilinearform ist.
(5.19) $uvu = lu + n(u) v$.
Zum Beweis von $(uv)'-vu =?=0$ setzen wir an:
(5.20) $z:= uv = k + m$ ($k \in K$, $m \in M$)
Wir drücken $m^2 \in K$ durch z aus:
$m^2 = (z-k)^2 = z^2 -2kz + k^2$
$= (uvu)v -2kz +k^2$, mit (3.19):
(5.21) $m^2 = (l-2k)z - n(u)n(v) +k^2 \in K$,

Wir unterscheiden 3 Fälle:
Fall A, z nicht in K: Aus (5.21) folgt $(l-2k)z \in K$ und damit
(5.22a) $l-2k =0$.
Schließlich erhalten wir mit (5.18) und (5.22a):
$(uv)'-vu = (uv)'+uv-l=z'+z -l = 2k-l=0$.

Fall B, z in K-{0}: Dann ist $z=k \neq 0$, $m=0$ und $m^2=0$, und aus (5.21) folgt
(5.22b) $0 = lk-2k^2-n(u)n(v) +k^2 = lk-k^2-n(u)n(v)$
Es ist aber $n(u)n(v) =uuvv = u(uv)v = uzv=ukv=k^2$
Aus (5.22b) => $0 = lk -2k^2 = k(l-2k)$
Wegen $k\neq0$ folgt wieder $l-2k=0$. Wir erhalten mit (5.18) und $z=k$ wieder:
$(uv)'-vu = k -vu = k -l +k=2k-l=0$

Fall C, $z =uv=0$, also $m=0$ und $k=0$: Aus (5.19) folgt, daß u und v linear abhängig sind, z. B. $v=su$ ($s \in K$). Dann ist aber $vu = suu =usu =uv =z=0$. Also auch in diesem Fall:
$(uv)'-vu = 0 - 0 = 0$
Somit ist in allen Fällen die Behauptung $(uv)'= vu$ bewiesen.
Die Eigenschaft (IA3) verifiziert man im allgemeinen Fall nun sofort:
Sei $x = k+u$, $y=r+v$ ($k,r \in K$, $u,v \in M$)
$(xy)' = (kr+ru+kv+uv)' =kr+ru'+kv'+(uv)'$
$=kr-ru-kv+vu=(r-v)(k-u) = y'x'$.

Damit sind alle IA-Eigenschaften für jede KA bewiesen. Die Kategorie KA ist identisch mit der Kategorie IA. Die Abbildung $x \to x'$ ist die IA-Involution j. Zugleich ergibt sich, daß die oben eingeführte quadratische Form $n()$ die multiplikative Norm $N()$ ist, und daß M das bezüglich dieser Norm das zu K orthogonale Supplement V ist:

(5.23) $N(x)= xx'= <x,x>$,

(5.24) $M = \{u \in A \mid u^2 \in K, u \text{ nicht } \in K-\{0\}\}$

$= V = \{u \in A \mid <1,u> = 0\}$

Da eine KA **konisch** ist, fallen S und NT zusammen und es gilt

(5.25) $S = NT = \{x \in A \mid x^2 \in Kx, x \notin K-\{0\}\}$

Beweis: Sei x=k+v => $x^2=(k^2+v^2)+2kv+2kk-2kk=(-k^2+v^2)+2kx$, $N(x)=k^2-v^2$ und damit: $x \in S \Leftrightarrow N(x)=0 \Leftrightarrow k^2=v^2 \Leftrightarrow x^2=2kx$ und x nicht in K-{0}. Q.e.d

6 Schlussbemerkungen

Die beiden Konzepte „IA“ und „KA“ ergeben also die gleichen Algebren. In [Lü76] habe ich eine Klassifikation aller IA (bzw. KA) nach dem Norm-Radikal **RadN** vorgenommen. Sei A eine IA (bzw. KA) über einem Körper K (char$K\neq 2$) mit **$\dim_K A = n+1$ (n>0),** dann gilbt es folgende drei Fälle

(5.2. I) dim RadN $\leq$ n-2 ➔ Das sind die sogenannten "regulären kinematischen Algebren" und **RadN={0}** nicht-entartete AMN, **und n+1 kann nur = 2 oder = 4 sein**.

(5.2.II) dim RadN = n-1 ➔ Das sind die sogenannten "geschlitzten" kinematischen Algebren. Die Dimension n+1 ist nicht beschränkt, und es gibt zu jedem n verschiedene nicht isomorphe Algebren, die in [Lü76] klassifiziert wurden.

(5.2.III) dim RadN = n ➔ Das sind die sogenannten ausgearteten kinematischen Algebren. Die Dimension n+1 ist nicht beschränkt.

Das Konzept "**AMN**" ist jedoch *allgemeiner*, als das Konzept "KA" bzw. "IA", denn es gibt, wie man an Beispielen sieht, auch ***nicht-konische*** AMNs.

Man kann z.B. eine nicht-konische AMN aus einer einfachen konischen AMN (A, K, N, Eins f) (z.B. L(2,K), Einheitsmatrix f) herstellen, indem man eine zu A isomorphe K-Algebra A ' nimmt, die Eins von A ' mit f ' bezeichnet, aber statt der gegebenen Norm die triviale Norm N'=0 nimmt. Sodann betrachte man die direkte Summe B :=A $\oplus$ A' und setze a.a' =0 für alle $a\in A$, $a'\in A'$, dann ist 1 := f+f ' die Eins von B, und B wird zu einer nicht-konischen AMN, wenn als Norm M:=N$\oplus$N' mit M(a+a') = N(a) $\forall a\in A$, $a'\in A'$ genommen wird. M ist trivialerweise multiplikativ.

Eine vollständige Klassifikation ***aller*** AMN (also auch aller *ausgearteten*) war mir in 2003 noch nicht gelungen. Das eben angeführte Beispiel einer nicht-konischen AMN gibt jedoch einen Hinweis: Unterscheidet man zwischen sogenannten "halbeinfachen" Algebren" (für welche die Zerlegungssätze von WEDDERBURN gelten) und „nicht-halbeinfachen“ Algebren (für welche diese Zerlegungssätze nicht gelten), so kommt man weiter. Das hatte ich aber erst ab 2004 ausgearbeitet.

7 Literaturverzeichnis

Referenz-Nr.	Autor, Titel, Verlag, Erscheinigsjahr
[Brö73]	L. Bröcker: Kinematische Räume. Geometriae Dedicata 1, 1973
[Grö69]	W. Gröbner: Matrizenrechnung. BI 103/103a, 1966
[Ka73]	H. Karzel: Kinematic Spraces. Ist. Naz. Alta Math. Symposia Mathemática, 11, 1973
[Ka74]	H. Karzel: Kinematische Algebren und ihre Ableitungen. Abh.Math. Sem. Univ. Hamburg 41, 1974
[Lü76]	C. Lübbert: Die kinematischen Geradenabbildungen. Habilitations-schrift, Preprint 278, TH-Darmstadt, 1976
[Lü77]	C. Lübbert: Differentialgeometrische Kennzeichnung einer Klasse von Algebren. Abh. d. Braunschweigischen Wiss. Gesellschaft, 28, 1977
[Lü79]	C. Lübbert: Über kinematische Geradenabbildungen. Abh. d. Braunschweigischen Wiss. Gesellschaft, 30, 1979
[Lü80]	C. Lübbert: Zerlegungen der Grenzgruppe des einfach-isotropen Raumes J_n. Journal of Geometry, 14/1, 1980
[Lü82]	C. Lübbert: Algebras con norma multiplicativa hermítica. Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. 31, 1983
[Lü2005]	C. Lübbert: Algebren mit multiplikativer Norm (AMN). Laufende unveröffentlichte Notizen (1994-2005), besonders zu Ausartungs-fällen RadN $\neq \{0\}$
[Re31]	F. Rehbock: Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. Monatsh. Math. u. Phys. 38, 1931
[Wae67]	B.L. v.d. Waerden: Algebra II, Springer 1967