← Fortsetzung von Kap.1-Kap.2

3 Algebren mit multiplikativer Norm ("AMN")

3.1 Vorbemerkung

Das Beispiel der GL(2,**R**) in Kapitel 2 wirft die Frage auf, ob es noch andere (assoiative) Algebren gibt, deren Einheitengruppe „so schön geometrisch" interpretierbar ist. Außerdem hat ein Algebraiker das Bedürfnis, die Ergebnisse aus Kapitel 2 möglichst unabhängig von topologischen Eigenschaften, also unabhängig vom Körper **R** der reellen Zahlen, zu verallgemeinern. Dazu ergeben sich unterschiedliche Ansätze: Man kann unterschiedliche Eigenschaften der GL(2) als Axiom an die Spitze stellen. Ich möchte drei Möglichkeiten vorstellen:

Sei A eine assoziative Algebra mit Eins **1** über einem Körper K (der Charakteristik $\neq 2$) und von endlichem Rang (Dimension) $[A : K] = n < \infty$. Der Einfachheit halber identifizieren wir die 1 des Körpers K mit der **1** der Algebra und denken uns K isomorph in A eingebettet: $K \subseteq A$.

Mit je einer der drei folgenden Eigenschaften könnte man als Zusatzforderung an A anfangen und schauen, welche Algebren herauskommen.

(KA) $a^2 \in K.1 + K.a$ **für alle** $a \in A$ **["kinematische" Eigenschaft - vgl. (2.3.3)]**

(IA) A **gestattet einen involutorischen Antiautomorphismus** $* : A \to A$ **mit** $z^* = z \Leftrightarrow z \in K$ **["involutorische" Eigenschaft - vgl. (2.3.13)]**

(AMN) A **gestattet eine quadratische Form ("Norm") N:** $A \to K$**, die** ***multiplikativ*** **ist, d.h.** $N(ab) = N(a)\,N(b)$ **für alle** $a,b \in A$ **[AMN - Eigenschaft - vgl. (2.3.1)]**

Von der Eigenschaft (KA) ist KARZEL ausgegangen und hat damit alle "kinematischen Algebren" bestimmt (sogar auch im Fall charK=2).

Die Eigenschaft (IA) habe ich 1975 herangezogen, um die kinematischen Algebren zu klassifizieren, mich aber dann auf den Körper **R** beschränkt, um Sätze der klassischen Kinematik zu verallgemeinern.

Die Eigenschaft (AMN) ist die allgemeinste Anforderung. Es ergibt sich nämlich, dass (KA) und (IA) Spezialfälle von (AMN) sind (siehe Kap.4 und Kap.5).

Neuere Arbeiten über die Eigenschaft (AMN) sind mir von anderen zur Zeit (2003) nicht bekannt. Ältere Arbeiten (bis ca. 1971) erwähnen den Fall einer *nicht-entarteten* multiplikativen quadratischen Form N, aber nur in einem sehr speziellen Zusammenhang und mit einer anderen Zielrichtung. Ich habe begonnen, in unveröffentlichten Notizen, die Algebren mit multiplikativer Norm (AMN) zu klassifizieren, besonders auch für den Fall, dass N ausgeartet ist; bin aber damit zur Zeit (2003) noch nicht durch.

Daher will ich jetzt etwas über **AMN** erzählen – wenigstens die gesicherten Ergebnisse.

3.2 AMN-Definitionen und erste Folgerungen

3.2.1 Definition "AMN"

(3.1) **DEF:** Das Tripel (A,K,N) heißt eine AMN – "**Algebra mit multiplikativer Norm**" – wenn gilt:

(AMN1) A ist endlich-dimensionale assoziative Algebra **mit Eins** über dem kommutativen Körper K, wobei char K $\neq$ 2 vorausgesetzt ist (d.h. 2 $\neq$ 0 in K). D.h.
- (i) (A,K,+) ist Vektorraum von **endlichem** Rang über K, d.h. $\dim_K A =$ **[A:K]<**∞.
- (ii) $\circ$: (a,b) $\in$ A x A $\rightarrow$ ab $\in$ A ist ein Produkt, das die Distributiv- und Assoziativgesetze erfüllt a(b+c)=ab+ac, (b+c)a=ba+ca, (ab)c=a(bc).
- (iii) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, K sei isomorph in A eingebettet, d.h. die Null 0 bzw. die Eins 1 von K ist auch die von A.

(AMN2) N: A$\rightarrow$K ist eine *nicht identisch verschwindende* **multiplikative quadratische Form** N(x) =<x,x> einer symmetrischen Bilinearform <,>: AxA$\rightarrow$**K**. D.h:
- (i) <x,y> = <y,x>, <x, y+z> = <x,y> + <x,z> , λ<x,y> = <λx,y> =<x,λy>
- (ii) **N(xy)=N(x)N(y)** (Multiplikativität von N)

für alle x, y, z$\in$A, $\lambda\in$K.

Den „Trivialfall“, [A:K]= 1, wo A mit dem Körper K identisch ist, schliessen wir i.allg. nicht aus, um bei gewissen Reduktionen, die später vorgenommen werden, einfacher formulieren zu können.

Die zu N gehörige symmetrische Bilinearform <x,y> ist bestimmt durch

(3.2) 2<x,y>=N(x+y)-N(x)-N(y)

<x,y> heißt auch das "**Skalarprodukt"** von x und y $\in$ A. Zu beachten ist aber, dass N(x) =0 für x$\neq$0 vorkommen darf. Im Beispiel : A = L(2) war N(x) = det x.

(3.3) DEF: x und y heißen **orthogonal**, in Zeichen **x** $\perp$ **y**, wenn <x,y>=0 ist

3.2.2 Weitere Definitionen zu einer AMN

Ähnlich wie bei der Algebra L(2) definieren wir:

(3.4) U := {x $\in$ A | x^{-1} existiert} sei die Menge der **Einheiten** von A (U ist eine Gruppe)

(3.5) NT := {x $\in$ A | es gibt y $\neq$ 0 mit xy=0} sei die Menge der **Links-Nullteiler** einschließlich der 0

(3.6) S := {x $\in$ A | N(x)=0} sei der "**Nullkegel**"

(3.7) P := {x $\in$ A | N(x) $\neq$ 0} sei die Menge der "**N-regulären**" Elemente

(3.7a) V := {x$\in$ A | <1,x>=0} sei der Vektorraum aller zu **1 orthogonalen Vektoren**

(3.8a) **Rad(N):=** {r $\in$ A | <r,x>=0 für alle x $\in$A} sei das "**Normradikal**" der AMN

Rad(N) ist (wegen der Bilinearität des Skalarproduktes) linearer Teilraum. Er besteht aus den Elementen, die zu allen Elementen von A orthogonal sind.

(3.8b) $\dim_K$ Rad(N) heißt der **Ausartungsgrad** der Norm bzw. der AMN
(Erläuterung: Ist ***N*** die Matrix von N in irgendeiner festen Basis des Vektorraums (A,K,+), so ist $\dim_k A - \dim_k$Rad(N) gleich dem Rang von ***N***).
Wir nennen die Norm N bzw. die AMN

"**nicht ausgeartet**" oder "**regulär**", wenn Rad(N)={0} ist,

"ausgeartet vom Grad r", wenn dim Rad(N)=r >0 ist,

"voll ausgeartet", wenn Rad(N) = S ist,

"total ausgeartet", wenn Rad(N) = V ist.

Anmerkung: Wenn die Norm **nicht-ausgeartet** ist (RadN={0}), ergeben sich bei gegebenem Grundkörper K für [A:K]>1 nur sehr wenige AMN-Typen. Zum Beispiel für den Körper K = **R** der reellen Zahlen:

- In der Dimension 2 die komplexen Zahlen **C** = **R**+i **R** (i $\notin$ **R**, $i^2=-1$) und die anomal-komplexen Zahlen A= **R**+e **R** (e$\notin$ **R**, $e^2=1$).
- In der Dimension 4 die reellen 2x2-Matrizen L(2, **R**) und die Hamilton-Quaternionen Q(**R**).
- Für höhere Dimension n>4 gibt es **keine** *nicht*-ausgearteten AMNs über **R** !!!

Anmerkung: Allgemein kann man aus den AMN-Axiomen **nicht** S = NT ableiten, also auch nicht U=P. D.h. **es kann Nullteiler auch außerhalb des Nullkegels geben**, und damit kann es **N-reguläre Elemente geben, die keine Einheiten**, sondern Nullteiler sind (Beispiel → später). Daher die folgende

(3.9) DEF: Eine AMN mit S=NT heißt **konisch**.

Eine konische AMN zeichnet sich dadurch aus, daß alle Nullteiler auf dem Nullkegel liegen (S=NT), und daß jedes N-reguläre Element eine Einheit ist (U = P).

Anmerkungen: Es gibt **nicht-konische** AMNs; Beispiel: die kommutative Algebra der anomal-komplexen Zahlen über R:
A = Rf + Rg (f,g $\notin$R, $f^2=f$, $g^2=g$, fg=0, f+g=1) mit einer "schiefen" Norm N'(λ 1 + μf) := λ. ($\lambda \in$ R). Alle **kinematischen** Algebren (KA) sind konische AMNs bezüglich der durch die KA-Eigenschaft induzierten Norm. Es gibt aber konische AMNs, die nicht kinematisch sind; Beispiel: die dualen 2x2-Matrizen L(2,D) = L(2,R) + e L(2,R) (e$\notin$R, $e^2=0$, $\lambda e=e\lambda$ für alle $\lambda\in$R) als Algebra über R (D=R+eR ist der Ring der "Dualzahlen).

3.2.3 Erste Folgerungen

Folgende Eigenschaften einer AMN lassen sich leicht beweisen:

(3.10a) N(1) = 1 (das gilt, weil N nicht identisch verschwindet)

(3.10b) $N(x^{-1}) = (N(x))^{-1}$ für x $\in$ U (dies folgt aus der Multiplikativität)

(3.10c) $\langle zx,zy\rangle=\langle xz,yz\rangle=N(z)\langle x,y\rangle$ für alle x,y,z$\in$A (dies folgt aus der Multiplikativität)

Einige geometrische Sprechweisen:

(3.10d) z heißt **normiert**, wenn N(z)=1 ist

(3.10e) Für normiertes z heißt L_z:x → zx eine **Linksschiebung**, R_z:x → xz eine **Rechtsschiebung**.

(3.10f) Für normiertes z ist $\langle zx,zy\rangle=\langle xz,yz\rangle=\langle x,y\rangle$. Wir sagen, das Skalarprodukt <,> ist "**invariant**" gegen Links- und Rechtsschiebungen.

(3.11) A = K+V, K $\cap$ V = {0},
d.h. V ist das zu 1 **orthogonale Supplement** in A.
Wegen $\langle 1,1\rangle\neq 0$ ist K+V direkte Summe. Mit Sätzen aus der Linearen Algebra (vgl. z.B. ARTIN II) beweist man, daß K+V ganz A aufspannt:

(3.12) NT ist auch die Menge der **Rechts-Nullteiler,** d.h. NT **ist die Menge der Nullteiler schlechthin** (jeder Rechts-NT ist auch Links-NT und umgekehrt). Das folgt aus $[A:K]<\infty$.

(3.13a) $A = U \cup NT$ mit $U \cap NT = \varnothing$

(3.13b) $A = P \cup S$ mit $P \cap S = \varnothing$

(3.14) $U \subseteq P$, d.h. alle Einheiten sind N-regulär

(3.15) $\mathrm{Rad}(N) \subseteq S \subseteq NT$, d.h. der Nullkegel enthält das Normradikal und besteht nur aus Nullteilern von A.

(3.16a) $\mathrm{Rad}(N) \subseteq_{TR} V$, also mit (3.15): **RadN** $\subseteq V \cap S$
Wegen $\mathrm{Rad}(N) \perp 1$ und $N(1) \neq 0$, ist Rad(N) ***Teilraum*** von $V = 1^{\perp}$

Mit der Zerlegung $A=K+V$ schreibt sich jedes $x \in A$ eindeutig in der Form

(3.16b) $x = k + v$ ($k \in K$, $v \in V$)

(3.16c) Aus $x = k+u \in U$ und $x^{-1} := k'+u'$ folgt $uu' = u'u = (1-kk')-k'u-ku'$.

(3.16d) Seien $x, y \in U$. Dann gilt $x \perp y \Rightarrow x^{-1} \perp y^{-1}$, d.h. der Übergang $x \rightarrow x^{-1}$ ($x \in U$) **erhält die Orthogonalität**;
insbesondere: $u \in V \cap U$:⇔. $u^{-1} \in V \cap U$,
Multipliziere $\langle x,y\rangle=0$ mit $N(x^{-1}y^{-1})$ und wende (3.10c) an!)

Daraus ersieht man: Ist die Norm total ausgeartet ($\mathrm{Rad}(N)=V$), so ist $V \cap U = \varnothing$, dh. Einheiten gibt es dann nur in K: $K-\{0\} = U$.

Über diese Grundformeln hinaus ergibt sich folgende bemerkenswerte und weittragende Identität, wenn man die Multiplikativität auf das Polynom 4. Grades $F(t;a,b,c,d):= N(a+tb)N(c+td)$ in der Variablen $t \in K$ mit aus beliebigen Konstanten a, b, c, $d \in A$ gebildeten Koeffizienten anwendet:

(3.17) $\boldsymbol{\langle ac,bd\rangle+\langle bc,ad\rangle = 2\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle}$

Spezialfälle daraus:

(3.17.1)	$d=v\perp 1=c$	➔	$\langle a,bv\rangle+\langle b,av\rangle = 0$	f. alle $a,b\in A$
(3.17.2)	$a=v \perp 1=b$	➔	$\langle vc,d\rangle+\langle c,vd\rangle=0$	f. alle $c,d\in A$
(3.17.2)	$a \perp b$	➔	$\langle ac,bd\rangle+\langle bc,ad\rangle =0$	f. alle $c,d\in A$
(3.17.3)	a=c, b=d	➔	$\langle ba,ab\rangle = 2\langle a,b\rangle^2-\langle a^2,b^2\rangle$	f. alle $a,b\in A$
(3.17.4)	a=c, b=d=1	➔	$N(a) = 2\langle 1,a\rangle^2-\langle 1,a^2\rangle$	f. alle $a\in A$
(3.17.5)	$v=a=c \perp 1$, b=d=1	➔	$N(v) = -\langle 1,v^2\rangle$	für alle $v \perp 1$

Aus der Identität (3.17) ergibt sich für a=1 und $b=d:=v \in V$, $c \in V=1^{\perp}$: $\langle c,v^2\rangle=0$ ➔ v^2 ist orthogonal zu V ; v kann daher nur eine Komponente in **K** und in RadN haben ➔

(3.18a) $\boldsymbol{v^2 \in K+\mathrm{Rad}(N)}$ **für alle** $\boldsymbol{v \in V}$ **, in jeder AMN**

Aus (3.18a), zusammen mit der Zerlegung (3.11), folgt:

(3.18b) $\boldsymbol{x^2 \in K+Kx+\mathrm{Rad}(N)}$ **für alle** $\boldsymbol{x \in A}$ **, in jeder AMN**

und damit der Satz:

(3.18c) **Satz: Ist N *nicht ausgeartet, also Rad(N)={0}*, so ist die AMN „*kinematisch*“ *(KA)*, d.h. es gilt** $\boldsymbol{x^2 \in K+Kx}$ **für alle** $\boldsymbol{x \in A}$.

Da wir (3.18b) häufig brauchen, drücken wir die Formeln mit Hilfe der orthogonalen Zerlegung $x = \xi+v$ ($\xi\in K$, $v\in V$) und der Norm N aus: Aus dem Ansatz

$$\mathbf{x^2 = \alpha(x) + \beta(x)x - r(x)} \quad \text{mit } \alpha(x), \beta(x) \in K,\ r(x)\in \mathrm{RadN}$$

folgt mit der Zerlegung $\mathbf{x = \xi+v}$ ($\xi\in K$, $v\in V$; $\xi = \langle 1,x\rangle$)

(3.18d) $x^2 = -N(x) + 2\xi x - r(x) \quad \forall\, x \in A$

(3.18e) $v^2 = -N(v) - r(v) \quad \forall\, v \in V$

wobei $r : A \to \mathrm{RadN}$ sogar eine <u>quadratische</u> Form über K ist

3.2.4 Faktorisierung nach dem Normradikal

(3.19) **Satz:** Das Normradikal Rad(N) einer allgemeinen AMN (A,K;N) ist ein in $V\cap S$ enthaltenes **zweiseitiges Ideal** in A.
D.h. R =Rad(N) ist K-linearer Teilraum von A und aus $r \in R$ folgt ar, ra $\in R$ für alle $a \in A$.

BEWEIS mit Hilde der Identität (3.17) $\langle ac,bd\rangle+\langle ad,bc\rangle=2\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle$.
R=Rad(N) ist K-linearer Teilraum, weil das Skalarprodukt bilinear ist. Ferner folgt aus (3.17) für d=1:
(*) $\langle ac,b\rangle=2\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle-\langle a,bc\rangle$ f.alle $a,b,c\in A$
Sei nun $a\in$ Rad(N), dann ist die rechte Seite in (*) gleich 0, also auch die linke
(**) $\langle ac,b\rangle=0$ für alle $c,b\in A$
d.h. mit a ist auch $ac\in$ Rad(N) (Rechtsidealeigenschaft); wenn man die Rollen von a und c vertauscht, folgt ebenso, daß auch $ca\in$ Rad(N) ist (Linksidealeigenschaft). Also ist Rad(N) ein 2-seitiges Ideal.

Da das Normradikal R=Rad(N) ein zweiseitiges Ideal ist, kann man den Faktorraum A '= A/R der Restklassen nach R in kanonischer Weise zu einer Algebra machen und in A ' in kanonischer Weise eine Norm N' definieren, so daß A' wieder eine AMN wird.

(3.20) **Satz**: Die Faktorisierung **'** : $x\in A \to x' := x+R \in A' = A/\mathrm{Rad}(N)$ ergibt eine AMN (A ', K, N') mit <u>nicht-entarteter</u> multiplikativer Norm N', die durch $N' : a' \in A' \to N'(a') := N(a) \in K$ für alle a'= a+Rad(N) definiert ist, wobei **K'**:=K.1' = K+R ein zu K isomorpher Körper ist. Nach (3.18c) ist daher A' =A/Rad(N) eine ***reguläre kinematische*** Algebra.

Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten.

(3.20.1) **Lemma:** Sei R=Rad(N) das Radikal der AMN A mit $\dim_K A=n$, $\dim_K R=r$. Dann ist A '=A/R eine assoziative Algebra (A ', K) über K mit $\dim_K A'=n-r$, wobei Multiplikation mit Körperelementen λ durch $\lambda x' :=(\lambda x)'$ und die Multiplikation in A ' durch x'y' := (xy)' definiert ist.

Beweis: Die Elemente von A ' sind die Restklassenmengen $x':= x+R =\{x+r \mid r \in R\}$, und es gilt (in A):
$a'=b' \Leftrightarrow a-b \in R$
speziell: $r \in R \Leftrightarrow r' = 0'$, also $x+r+R=x+R$ für $r\in R$, das Nullelement 0' von A ' ist die Klasse R. ($a'\neq b' \Leftrightarrow a' \cap b'= \emptyset$)
A ' ist also zunächst der Faktorraum (VR über K) zum Vektorraum A nach dem Teilraum R, und deshalb ist $\dim_K A'=n-r$. Die Vektorraum-Rechenregeln in A' sind definiert über
$x'+y':= (x+y)'$ $(x,y \in A)$, $k.x':= (kx)'$ $(k \in K, x \in A)$
Das ist sinnvoll wegen $(x+r)+(y+s)=(x+y)+(r+s) \in (x+y)+R$ und $k(x+r)=kx+kr \in kx +R$ für $x,y \in A$, $r,s \in R$, $k\in K$.
Da R ein (links- und restsseitiges) Ideal in A ist, d.h., da
(*) $xR \subseteq R$, $Rx \subseteq R$, $RR \subseteq R$ $(x \in A)$,
gilt, ergibt die Komplexmultiplikation in A :
(*') $(x+ R)(y+ R) = xy+Ry+xR+RR \subseteq xy+R$
Daher übertragen wir die Multiplikation von A nach A **'** durch die Definition:
(*'') $x'\bullet y' := (xy)'$, d.h. $(x+ R)\bullet(y+ R) := xy+ R$
Damit zeigt man auch leicht die Assoziativität in A ': $x'\bullet(y'\bullet z')= x'\bullet(yz)'= (x(yz))'= ((xy)z) = (xy)'\bullet z' = (x'\bullet y')\bullet z'$.

Zu beachten ist, daß die Komplexmultiplikation (') in A etwas anderes ist als die mit (*'') definierte Elementmultiplikation in A' !* Unter Beachtung dieser Tatsache schreiben wir der Einfachheit halber wieder x'y' statt x'•y'.

Die Definitionen für Addition, Multiplikation mit K und Multiplikation untereinander sind von den Repräsentanten unabhängig (Bew. als Übung). Die Null und Eins der Algebra A ' sind

0'=R, 1'=1+R.

Leicht zu beweisen:

(3.20.2) Die Restklassen k' = k+ R (k ∈ K) haben je **genau einen** Repräsentanten in K,

denn für k'=t' (k,t ∈K) gilt: k-s ∈R :⇔ k-t=0, da K∩R={0}, also k=t.

Der Körper K ist ***nicht*** (wie bei A) in A ' eingebettet; wegen (3.20.2) ist aber **K'**:=K.1' = K+R ein zu K ***isomorpher*** Körper mit $k'^{-1}=k^{-1}$+R für k'=k+R (k ∈ K-{0}).

(3.20.3) Ist u eine Einheit in A, so ist die Restklassse u+R Einheit in A ', und das Inverse ist $u'^{-1}= u^{-1}$ +R. Ist x Nullteiler in A, so ist die Restklasse x+R Nullteiler in A'.

Es gilt zunächst:
(*) U/R :={u+R| u ∈ U} ⊆ U ' und NT/R :={x+R|x ∈ NT} ⊆ NT'
Frage: Ist die Eigenschaft "Einheit" bzw. "Nullteiler" unabhängig vom Repräsentanten in A ? Ja!

(3.20.3) **Corrolar:** Sind u ∈ U, x ∈ NT, r ∈ R=Rad(N), so sind auch u+r ∈ U, x+r ∈ NT, d.h. es gilt U/R **=** U ' und NT/R **=** NT '.

Beweis: Sei U ' bzw NT ' die Menge der Einheiten bzw. Nullteiler von A '=A/R. Wie bei jeder assoziativen Algebra endlichen Ranges gilt sowohl
(**) U ∪ NT = A, U∩ NT= ∅
als auch
(***) U' ∪ NT' = A', U'∩ NT'= ∅
Seien nun u ∈ U, x ∈ NT, r ∈ R, dann sind wegen (*): u+R Einheit in A' bzw. x+R Nullteiler in A'. Wäre u+r Nullteiler in A, so wäre u+r+R=u+R Nullteiler in A' im Widerspruch zu (**). Wäre x+r Einheit in A, dann wäre x+r+R=x+R Einheit in A' im Widerspruch zu (**). Q.e.d.

(3.20.3) **Lemma:** A '=A/R ist eine AMN (A ', N', K), wenn die Norm N': A '→K durch N'(x') := N(x) definiert wird; und N' ist **nicht-entartet**.

Beweis: Diese Definition ist vom Repräsentanten unabhängig, denn ist y=x+r , also x'=y', so gilt N'(y')=N(x+r)= N(x)+2<x,r>+N(r) = N(x)=N'(x') (wegen <x,r>=N(r)=0).
Daß N' eine quadratische Form über (A',K) und multiplikativ ist, folgt daraus folgendermaßen:
Das Skalarprtodukt in A ' ist
2<x',y'>':= N'(x'+y')-N'(x')-N'(y')=...=N(x+y)-N(x)-N(y)= <x,y>.
Aus der Bilinearität von <x,y> folgt die von <x',y'> und damit die Normeigenschaft von N'. Die Multiplikativität gilt wegen
N'(x'y')=N'((xy)')=N(xy)=N(x)N(y)=N'(x')N'(y').
N' ist **nicht-entartet**, denn das Normradiklal
R '=Rad(N')={r' | <r',x'>'=0 (x' ∈ A')}={r'|<r,x>=0 (x ∈ A)}
besteht aus allen r' mit Repräsentanten r ∈ R, also r'=0': **Rad(N') = {0'}**
Nach (3.18) ist daher A '=A/Rad(N) eine *reguläre kinematische* Algebra, dh. es gilt **x'² ∈ K1' + Kx' für alle x'**∈ A **' und aus <x',y'>'=0'** ∀**y' folgt x'=0'.**

3.2.5 Weitere Anmerkungen

(3.18f) **v**∈V∩S ➔ **v² ∈ RadN**

Dh. Das Quadrat jedes zu 1 orthogonalen Nullkegelelements ist ein Normradikalelement.

Folgerung: Mit der **"LIE-Klammer" [x,y] := xy -yx** gilt für jede AMN:

(3.18g) **u, v** ∈ V ➔ **[u,v]** ∈ V; d.h. (V , [,]) ist eine LIE-Algebra.

Beweis: Siehe **(4.7a)** in Datei Amn3_IA+KA_v04.doc**.** Anmerkung: Man beweist es durch Einführung der "Fastinvolution" **x = ξ+v → x*:= ξ-v** (ξ∈ K, v∈V), für die gilt
(xy)* - y*x* ∈ Rad(N) für alle x,y ∈ A .

Aus (3.18) ergibt sich ferner:

(3.19) a ∈ P und ab=0 oder ba=0 ➔ b ∈ Rad(N),

(3.19a) a ∈ NT und ab=0 oder ba=0 aber b∉Rad(N) ➔ a∈ S d.h. ein N-regulärer Nullteiler wird nur durch Radikalelemente anulliert, und: ein Nullteiler, der (wenigstens) ein Nicht-Radikalelement anulliert, liegt auf dem Nullkegel.

(3.20) Jedes echte Links- (/Rechts- / 2-seit-) Ideal L liegt in NT.

Beweis: Sei L echtes Linksideal und sei $x \in L$. Da L echt ist, ist $A\,x \neq A$, also ist $r_x : a \to r_x(a) := ax$ eine lin. Abb. mit Kern $r_x \neq \{0\}$; es gibt also $y \neq 0$ mit $yx=0$ ➔ x ist Nullteiler. Q.e.d.

(3.21) P ist **Halbgruppe** bezüglich des Algebraprodukts, d.h. mit a, b $\in$P ist auch ab $\in$P.

(3.22) Gibt es ein ganz in $P_0 := P \cup \{0\}$ gelegenes nichttriviales, echtes Linksideal L, also $L \neq \{0\}$, $L \neq A$, $L \subseteq P_0$, so ist S = RadN.

Bew.: Sei $t \in L$ und $t \neq 0$. Sei $x \in A$ beliebig.
(i) Entweder ist xt =0 ➔ dann ist $x \in$RadN wegen (1.17).
(ii) Oder es ist $xt \neq 0$. Da xt wieder in L ist (Linksideal!!), ist xt auch in P. ➔ $0 \neq N(xt)=N(x)N(t)$ ➔ $N(x) \neq 0$ ➔ $x \in P$.
(i) und (ii) ergeben $P \cup$ RadN= A, es ist aber $P \cap$ RadN = $\emptyset$.
Andererseits besagt (1.13): $A=P \cup S$, $P \cap S = \emptyset$. Dies zusammen mit (iii) ergibt S = RadN. q.e.d.

(3.23) Jedes in V enthaltene 2-seit-Ideal ist in RadN enthalten:
$J \subseteq V$ (J 2-seit)➔ $J \subseteq$RadN. D.h., RadN ist in diesem Sinne maximal.

Bew.: Sei $v \in J$, $a \in A$ beliebig. Sei $x \to x^*$ die in Kap 3 definierte Fastinvolution. Dort hatten wir $xy^*+yx^* = 2\langle x,y\rangle + 2s(x,y)$ mit $s(x,y) \in$RadN bewiesen. Daraus folgt hier:
$va^*+av^* = va-av = 2\langle v,a\rangle + 2s(v,a)$ ➔$va-av-2s(v,a) = 2\langle v,a\rangle$. Die linke Seite ist in V, die rechte in K; also muss $\langle v,a\rangle=0$ sein für alle $a \in A$; d.h. $v \in$RadN ➔$J \subseteq$RadN. q.e.d.

➔ Fortsetzung in Kap.4 – Kap.6