

Geometrie in Liegruppen

Beitrag zum mathematischen Teil der Philosophischen Teerunde, FB4/TUD
im Juni 2003

V0.3 / 25. Juni 2010 (Skript vom Juni 2003 etwas überarbeitet)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	2
2	Geometrie der Gruppe $GL(2, \mathbb{R})$.....	3
2.1	Vorbemerkung: $L(n)$, $GL(n)$	3
2.2	Eigenschaften von $L(n)$ und $GL(n)$	3
2.3	Anwendung auf den Fall $n=2$	5
2.4	Wahl einer Orthonormalbasis für $L(2)$	7
2.5	Links- und Rechtsideale in $L(2)$	8
2.6	Projektive Darstellung der $GL(2, \mathbb{R})$	9
2.6.1	Projektiver Raum.....	9
2.6.2	Die $PGL(2)$ und ihre Untergruppen.....	10
2.6.3	Invariante Parametrisierung.....	12
2.6.4	"Rechts-" und "Linksschiebungen" im Raum $PL(2)$	13
2.6.5	"Drehungen" im Raum $PL(2)$ und in der Ebene PV	16
2.6.6	Geradenabbildung.....	17
3	Algebren mit multiplikativer Norm ("AMN").....	20
3.1	Vorbemerkung.....	20
3.2	AMN-Definitionen und erste Folgerungen.....	21
3.2.1	Definition "AMN".....	21
3.2.2	Weitere Definitionen zu einer AMN.....	21
3.2.3	Erste Folgerungen.....	22
3.2.4	Faktorisierung nach dem Normradikal.....	24
3.2.5	Weitere Anmerkungen.....	25
4	Involutorische Algebren (IA) als Spezielle AMN.....	27
5	Kinematische Algebren (KA) als spezielle AMN.....	29
6	Schlussbemerkungen.....	31
7	Literaturverzeichnis.....	32

1 Einleitung

Geometrie ist was für's Auge. Bei den antiken Griechen, die sehr visuell dachten, waren Geometrie und Mathematik dasselbe. Das hat noch lange nachgewirkt: Später, im 18. und 19. Jh., hatte die Mathematik Schwierigkeiten, sich von den scheinbar "naturegegebenen" Dogmen der (Euklidischen) Geometrie zu trennen. Heute sind in der Mathematik von der Geometrie nur noch die Bezeichnungen – so zu sagen als "Eselsbrücken" und als Reminiszenz an frühere Zeiten – übrig geblieben. ("Abbildung", "Kurve", "Graph", "Raum", "Tangentialbündel", ...). In der geometrischen Sichtweise mathematischer Sachverhalte liegt für mich der Reiz darin, den schmalen Pfad zwischen "**Hilfe und Täuschung durch die unmittelbare Anschauung**" zu gehen. Besonders reizvoll ist eine mathematische (algebraische) Struktur; deren Teile einerseits als Elemente einer Geometrie, andererseits aber zugleich als die „Bewegungen“ oder Bewegungsgruppen dieser selben Geometrie gedeutet werden können.

Matthias hat im letzten Vierteljahr (2003) im mathematischen Teil der "Philosophischen Teerunde" eine Einführung in die Liealgebren gegeben. Ich habe viel gelernt. Von vielem, was Matthias vorgeführt hat, hatte ich, als ich studierte, nie gehört.

Nur die **geometrische** Motivation, warum man so was wie Liealgebren untersucht, hat mir bei Matthias etwas gefehlt. – Und dazu möchte ich jetzt etwas aus meiner Sicht beitragen. Die meisten Sachen sind bekannt, wurden allerdings, soviel ich weiß, meist nicht in der hier betonten „geometrischen Sicht“ dargestellt.

Im Vordergrund standen für mich mehr die **Kontinuierlichen Gruppen** (Liegruppen) als die Liealgebren. Die Liealgebra ist für mich nur ein Hilfsmittel zur Beschreibung der lokalen Eigenschaften einer Liegruppe. Liegruppen sind für mich, obwohl ich mich nur mit einigen wenigen, ganz einfachen Spezialfällen beschäftigt habe, etwas sehr reizvolles aus folgendem Grund: Einerseits sind sie klassische Objekte der **Algebra**, besonders wenn sie als Automorphismengruppe innerhalb des Rings der Endomorphismen eines Vektorraums oder eines projektiven Raumes – also eines "geometrischen Gebildes" – aufgefasst werden können. Andererseits ist eine Liegruppe G als differenzierbare Mannigfaltigkeiten **selbst ein geometrisches Objekt**. Besonders interessant wird es, wenn man die Elemente einer solchen Liegruppe G als "Bewegungen" **auf sich selbst** auffasst: Bewegungseigenschaften (Gruppeneigenschaften) können dann als Inzidenzen von geometrischen Objekten gedeutet werden und umgekehrt.

Der **Bezug zwischen Liegruppe und Liealgebra** besteht für mich, einfach und "geometrisch" ausgedrückt, in folgendem:

Die Liealgebra \mathfrak{g} zu einer Liegruppe G ist der **Tangentialraum $T_1(G)$** an die Mannigfaltigkeit G im **Eins-Punkt** ($1 =$ das neutrale Element von G als Gruppe). Einen beliebigen anderen Tangentialraum $T_a(G)$ im Bündel $T(G)$ bekommt man daraus, dass man den Einspunkt 1 samt seinem Tangentialraum $T_1(G)$ mit Hilfe der "Links-Schiebung" $L_a : G \rightarrow G (x \rightarrow L_a(x) := ax)$ in den Punkt $a \in G$ **verschiebt**.

Ein "Zusammenhang" auf der Mannigfaltigkeit G ist also in natürlicher Weise durch die stetige Operation der Gruppenmultiplikation $(a, x) \rightarrow ax$ in der Gruppe G gegeben.

... Und was macht nun $\mathfrak{g} := T_1(\mathbf{G})$ zu einer **Lie-Algebra**, so wie sie Matthias definiert hat? Ganz einfach: Sind $X = \frac{d}{dt}$ bzw. $Y = \frac{d}{ds}$ zwei Tangentenvektoren $\in T_1(\mathbf{G})$ in $\mathbf{1}$ an Kurven $\gamma: t \in \mathbb{R} \rightarrow \gamma(t) \in G$ bzw. $\delta: s \in \mathbb{R} \rightarrow \delta(s) \in G$ durch den Eins-Punkt, $\gamma(0) = \delta(0) = \mathbf{1}$, so ist $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X = (\frac{d}{dt} \circ \frac{d}{ds} - \frac{d}{ds} \circ \frac{d}{dt})_{t=0, s=0}$ wieder ein Element in $T_1(\mathbf{G})$ (was für $X \circ Y$ bzw. $Y \circ X$ alleine **nicht** gilt!). $T_1(\mathbf{G})$ **zusammen mit der Operation $[\ , \]$ bildet eine Lie-Algebra** (d.h., es gilt auch die **Jakobi-Identität** $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ für alle $x, y, z \in \mathfrak{g} = T_1(\mathbf{G})$), wie man leicht zeigt.

Da die Struktur einer Liealgebra nur eine **lokale** Eigenschaft einer Liegruppe ist, ist zu erwarten, dass es zur selben Liealgebra i.allg. mehrere (nicht-isomorphe) Liegruppen geben wird.

2 Geometrie der Gruppe $GL(2, \mathbb{R})$

2.1 Vorbemerkung: $L(n)$, $GL(n)$

Wir betrachten die (assoziative) Algebra $L(n) = L(n, \mathbb{R})$ der **reellen $n \times n$ -Matrizen** über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen. Mit der Matrizenaddition ist $L(n)$ ein n^2 -dimensionaler reeller Vektorraum über \mathbb{R} . Wenn man keine Stetigkeit und Konvergenz braucht und nicht differenzieren muss, kann man statt \mathbb{R} auch irgendeinen anderen Körper \mathbf{K} der Charakteristik $\neq 2$ nehmen; die meisten nachfolgenden Ergebnisse gelten dann ebenso, weil sie "rein algebraischer Natur" sind und meist gar nichts mit Stetigkeit, Konvergenz und Differenzieren zu tun haben. Mit der gewöhnlichen Topologie des \mathbb{R}^m bekommt man aber ein Werkzeug in die Hand, das viele geometrisch interessante Eigenschaften schneller herzuleiten gestattet.

Statt $L(n, K)$ könnten wir, vornehmer ausgedrückt, auch die (assoziative) Algebra **End(V)** der Endomorphismen eines n -dimensionalen K -Vektorraums V betrachten. Das kommt auf dasselbe heraus, wenn man in V eine bestimmte Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ festlegt: Die $x \in V$ würden dann durch Spalten (x_i) mit Zahlen x_1, \dots, x_n aus K und ein Endomorphismus $\alpha \in \text{End}(V)$ würde durch eine $n \times n$ -Matrix (a_{ik}) mit Elementen aus K dargestellt. Der Einfachheit halber bleiben wir gleich bei $L(n) = L(n, \mathbb{R})$; die Matrizen $a \in L(n)$ können wir dann auch als Endomorphismen des Vektorraumes \mathbb{R}^n auffassen.

Von besonderem Interesse in $L(n)$ ist die "**Einheitengruppe**" **$GL(n)$** , also diejenigen Matrizen a mit **$\det(a) \neq 0$** .

2.2 Eigenschaften von $L(n)$ und $GL(n)$

Zu **jeder $n \times n$ -Matrix $a \in L(n)$** sind u.a. folgende Größen relevant für eine "Geometrie":

- (1) Die **Determinante** $\det(a)$ ($\in \mathbb{R}$)
- (2) Das **Minimalpolynom** $m(a; x)$
- (3) Die **Exponentialfunktion** $\exp_a: t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(ta) = \mathbf{1} + ta + \frac{t^2}{2!}a^2 + \dots \in G(n)$

Zur Erinnerung einige Tatsachen aus der Matrizenrechnung (ohne Beweise).

Für $a, b \in L(n, \mathbb{R})$ gilt:

$$(2.1.1) \quad \det(ab) = \det(ba) = \det(a) \det(b), \text{ d.h. } \det \text{ ist } \mathbf{multiplikativ} \text{ bezüglich der Matrizenmultiplikation; } \det(\mathbf{1})=1, \text{ und falls } \det(a) \neq 0: \det(a^{-1}) = (\det(a))^{-1},$$

Das wird für $n=2$ der **wichtigste Ausgangspunkt** für geometrische Betrachtungen in $L(2)$ bzw. $GL(2)$ sein.

(2.1.2) DEF: Das **Minimalpolynom** der Matrix a ist ein nicht identisch verschwindendes Polynom **kleinsten Grades $d=d_a$** , in der Unbestimmten x , mit von a abhängigen Koeffizienten $\alpha_i(a) \in \mathbb{R}$

$$m(a; x) = x^d + \alpha_{d-1}(a) x^{d-1} + \alpha_{d-2}(a) x^{d-2} + \dots + \alpha_1(a) x + \alpha_0(a),$$

derart dass $m(a; a) = \mathbf{0-Matrix}$ wird, wenn man x durch a und 1 (hinter $\alpha_0(a)$) durch die Einheitsmatrix $\mathbf{1} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ ersetzt. $d=d_a$ heißt auch der **Grad der Matrix a** .

(2.1.3) Da n^2 die Dimension des Vektorraumes $L(n)$ ist, sind mehr als n^2 Elemente von $L(n)$ immer linear abhängig; daher: $1 \leq d_a \leq n^2$. Man zeigt aber durch Vergleich von $m(a; x)$ mit dem für Eigenwertprobleme relevanten "charakteristischen Polynom" $\varphi(a; \lambda) := \det(\lambda \mathbf{1} - a) = \lambda^n + t_1(a) \lambda^{n-1} + \dots + t_{n-1}(a) \lambda + t_n(a)$, dass für den Grad einer Matrix a sogar

$$\mathbf{1 \leq d_a \leq n}$$

gilt. $m(a; a) = 0$ heißt aber: **1 und die ersten d_a Potenzen jeder Matrix a sind linear abhängig.**

Daraus folgt sofort: Jede Potenz a^m ist Linearkombination von $1, a, a^2, \dots, a^{d-1}$, d.h.:

(2.1.3a) Für jedes $a \in L(n)$ ist der von $1, a, a^2, \dots, a^{d-1}$ aufgespannte lineare Teilraum eine **kommutative Teilalgebra** von $L(n)$ mit der Dimension $d=d_a$.

(2.1.4) $\exp(ta)$ konvergiert für **jede** Matrix $a \in L(n)$ und für **jedes** $t \in \mathbb{R}$; und es ist $\det(\exp(ta)) > 0$, also $\exp(ta) \in GL(n, +)$ ($G(n)$ -Komponente der $\mathbf{1}$).

(2.1.5) Die **Exponentialabbildung** $\exp_a: t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(ta) \in GL(n)$ ist für jedes feste $a \in L(n)$ ein **Gruppenhomomorphismus** der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die multiplikative Gruppe $GL(n)$. D.h. es gilt

$$\exp(0) = \mathbf{1} \text{ und}$$

$$\exp((t+s)a) = \exp(ta) \exp(sa) = \exp(sa) \exp(ta) \text{ und}$$

$$\exp(pt a) = (\exp(ta))^p$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und ganze Zahlen p .

\exp_a heißt die zu a gehörige kommutative **1-parameter-Untergruppe in $GL(n)$** .

(Bem: Im Allgemeinen gilt $\exp(a+b) \neq \exp(a) \exp(b)$ für $a \neq b \in GL(n)$!)

(2.1.5) **Tangentenvektoren im 1-Punkt:** Differenzieren einer 1-parametrischen Untergruppe nach t ergibt $d \exp(ta) / dt = a \exp(ta)$ und für $t=0$: $d \exp(ta) / dt |_{t=0} = a$. Die Matrix a kann also als **Tangentenvektor an die Kurve \exp_a im 1-Punkt** aufgefasst werden. Da \exp_a für **jedes** $a \in L(n)$ definiert ist, ist der Tangentialraum der Gruppe $GL(n)$ im Einspunkt: $\mathbf{T_1(GL(n)) = L(n)}$.

- (2.1.6) Trivialerweise ist mit $a, b \in L(n)$ auch $[a, b] := ab - ba$ in $L(n)$, und $[.,.]$ erfüllt die Jacobi-Identität, so dass $L(n)$ zur **Liealgebra** der kontinuierlichen Gruppe $GL(n)$ wird. Diese Liealgebra wird (statt mit $L(n)$) auch oft mit **gl(n)** bezeichnet. Erst bei **echten** Untergruppen von $GL(n)$ zeigt sich, dass die Einführung der Lieklammer $[.,.]$ sinnvoll ist: Ist nämlich U eine Lie'sche Untergruppe von $GL(n)$, deren Tangentialraum $\mathfrak{u} = T_1(U)$ die Lieelemente a, b enthält, so ist auch $[a, b] \in \mathfrak{u}$.
- (2.1.7) Die 1-param. UG \exp_a liegt wegen (2.1.3a) ganz in der von $1, a, a^2, \dots, a^{d-1}$ aufgespannten kommutativen Teilalgebra von $L(n)$, die von der Dimension $d_a \leq n$ ist.

2.3 Anwendung auf den Fall $n=2$

Wir betrachten jetzt die Matrizenalgebra $L(2)$ und darin die Gruppe $GL(2)$.

- (2.3.1) Für $n=2$ ist $\det: L(2) \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\det(\mathbf{a}) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ (a_{ik} die reellen Komponenten der Matrix \mathbf{a}) eine **quadratische Form** auf dem 4-dimensionalen Vektorraum $L(2)$. Dazu gehört die **symmetrische Bilinearform** $\langle \cdot, \cdot \rangle: L(2) \times L(2) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \det(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \det(\mathbf{a}) - \det(\mathbf{b}).$$

Die Determinante kann man also auch so schreiben:

$$\det(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle.$$

Die **Multiplikativität** $\det(\mathbf{ab}) = \det(\mathbf{a}) \det(\mathbf{b})$ der quadratischen Form **det** hat folgende nützliche Formel zur Folge:

- (2.3.1a) $\langle \mathbf{az}, \mathbf{bz} \rangle = \langle \mathbf{za}, \mathbf{zb} \rangle = \det(\mathbf{z}) \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ für alle Matrizen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{z} \in L(2)$

Manche Geometer nannten \det in $L(2)$ daher auch eine "**Norm**" (eigentlich sollte man "Normquadrat" für $\det(\mathbf{a})$ sagen! – Nicht zu verwechseln mit der in Hermiteschen Räumen gebräuchlichen positiv definiten Norm $\|x\|$). Diese "Norm" **det** ist allerdings nicht positiv definit, denn es gibt ja reelle Matrizen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} (\neq 0)$ mit $\det \mathbf{a} > 0$, $\det \mathbf{b} = 0$, $\det \mathbf{c} < 0$.

*Fasst man $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als "**Skalarprodukt**" auf, so ergeben sich sofort viele geometrisch interpretierbare Folgerungen für den 4-dimensionalen Vektorraum $gl(2) = L(2)$ und die darin liegende 4-dimensionale Liegruppe $GL(2)$!*

Bemerkung: $\det(\mathbf{a})$ ist für $L(n)$ in *höheren* Dimensionen ($n > 2$) **keine** quadratische Form mehr (sondern z.B. eine kubische Form für $n=3$; allgemein eine Multilinearform). Da man aber nur mit **quadratischen Formen** "einfache" (euklidische oder nicht-euklidische) Geometrie treiben kann, ist der Fall $n=2$ ein geometrisch besonders günstiger Sonderfall, den wir jetzt ausschlichten wollen.

Anmerkung: Die Menge der reellen 2×2 -Matrizen mit Determinante 1,

$$\mathbf{SL}(2) := \{ \mathbf{a} \in L(2) \mid \det(\mathbf{a}) = 1 \},$$

ist eine (Lie'sche) Untergruppe der $GL(2)$. Aus (2.3.1a) folgt:

- (2.3.1b) $\langle \mathbf{za}, \mathbf{zb} \rangle = \langle \mathbf{az}, \mathbf{bz} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ für alle $\mathbf{z} \in \mathbf{SL}(2)$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L(2)$, d.h. das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine **Invariante** der $L(2)$ gegenüber Links- und Rechtsschiebungen aus $\mathbf{SL}(2)$,

(2.3.2) Die quadratische Form $\det(\cdot)$ ist **nicht ausgearbeitet**, denn das "Normradikal" $\text{Rad}(\det) := \{a \in L(2) \mid \langle a, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in L(2)\}$ besteht nur aus der Nullmatrix; $\text{Rad}(\det) = \{0\}$.

Das sieht man unmittelbar aus der Form

$$\det(a) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

bzw. dem zugehörigen Skalarprodukt

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2}(a_{11} b_{22} + b_{11} a_{22} - a_{21} b_{12} - b_{21} a_{12}) :$$

darin fehlt kein Term, so dass alle Matrixelemente a_{ik} bzw. b_{ik} vorkommen.

Aus (2.1.2) und (2.2.3) folgt für alle $a \in L(2)$:

(2.3.3) $a^2 \in \mathbb{R}a + \mathbb{R}\mathbf{1}$, d.h. das Quadrat jeder 2×2 -Matrix a ist Linearkombination von a und der Einheitsmatrix $\mathbf{1} = \text{diag}(1, 1)$.

Bemerkung: KARZEL hat in [Ka73] eine assoziative Algebra A mit Eins e über einem Körper K "**kinematisch**" genannt, wenn für jedes $a \in A$ gilt: $a^2 \in Ka + Ke$. Die $GL(2)$ ist also eine "kinematische" Algebra.

Wendet man (2.3.3) auf beliebige Potenzen von a an, so folgt ebenfalls sofort

(2.3.3a) $a^m \in \mathbb{R}a + \mathbb{R}\mathbf{1}$ ($m=2, 3, \dots$) - Jede Potenz einer 2×2 -Matrix a ist Linearkombination aus a und der Einheitsmatrix.

Wegen $a^m a^k = a^k a^m$ folgt:

(2.3.3b) Für jedes $a \in L(2)$ ist $\mathbb{R}a + \mathbb{R}\mathbf{1}$ eine **kommutative** Teilalgebra von $L(2)$.

Für die Gestalt der 1-parameter-Untergruppen von $GL(2)$ hat das folgende Konsequenz:

(2.3.3c) $\exp_a t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(ta) = \mathbf{1} + ta + \frac{t^2}{2!}a^2 + \dots = c_a(t) \mathbf{1} + s_a(t) a \in GL(n)$
mit gewissen reellen Funktionen $c_a(t)$, $s_a(t)$, für die $c_a(0)=1$, $s_a(0)=0$ gilt.
D.h. die UG mit Tangente a im Einspunkt liegt ganz in dem von $\mathbf{1}$ und a aufgespannten 2-dimensionalen linearen Teilraum von $L(2)$. [Näheres \rightarrow siehe (2.6.19).]

Neben den 1-parameter-Gruppen gibt es noch folgende geometrisch interessante Mengen in $L(2)$:

(2.3.4) Die Menge $S := \{a \in L(2) \mid \det(a)=0\}$ ist wegen (2.3.2) ein nicht entarteter quadratischer Hyperkegel im Raum $L(2)$. Wir nennen ihn den zu \langle, \rangle gehörigen "**Nullkegel**".

(2.3.5) DEF: $a \in L(2)$ heißt Links-**Nullteiler** der Algebra $L(2)$, wenn es ein $b \in L(2)$ mit $b \neq 0$ gibt, so dass $ab=0$.
Da $L(2)$ eine Eins hat und über \mathbb{R} endlichdimensional ist, folgt, dass jeder Links-Nullteiler a auch ein Rechts-Nullteiler ist, d.h., es gibt auch ein $c \in L(2)$, $c \neq 0$ mit $ca=0$. Daher heißt a einfach **Nullteiler**.
Sei $\text{NT} := \{a \in L(2) \mid a \text{ ist Nullteiler}\}$.

(2.3.6) In $L(2)$ gilt: $S = \text{NT}$, $GL(2) \cup S = L(2)$, $GL(2) \cap S = \emptyset$

Das Skalarprodukt \langle, \rangle verführt sofort dazu, den Begriff "orthogonal" einzuführen:

(2.3.7) DEF: Zwei Matrizen $a, b \in L(2)$ mit $\langle a, b \rangle = 0$ heißen **orthogonal** zueinander, in Zeichen $a \perp b$.

(2.3.8) DEF: V sei die Menge aller zur Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ "orthogonalen" Matrizen,
 $V := \{v \in L(2) \mid \langle \mathbf{1}, v \rangle = 0\} = \mathbf{1}^\perp$

Wegen der Bilinearität von des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist V ein Vektorraum der Dimension 3 in $L(2)$, und es gilt die orthogonale Zerlegung

$$(2.3.9) \quad L(2) = \mathbb{R}\mathbf{1} + V, \quad \mathbb{R}\mathbf{1} \cap V = \{0\},$$

Aus (2.3.9) folgt

(2.3.10) Jede Matrix $x \in L(2)$ lässt sich eindeutig in der Form
 $x = \xi \mathbf{1} + v$ mit $\xi \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ schreiben.

Mit (2.3.3) und der Zerlegung (2.3.9,) ergibt sich:

(2.3.11) $\mathbf{a}^2 = -\det(\mathbf{a}) \mathbf{1} + 2\langle \mathbf{1}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{a} \in L(2)$ und speziell
 $\mathbf{v}^2 = -\det(\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v} \in V$

(2.3.12) DEF: Wir nennen

$x^* := \xi \mathbf{1} - v$ die zu $x = \xi \mathbf{1} + v$ "konjugierte" Matrix

[nicht zu verwechseln (aber verwandt!) mit dem bei komplexen Vektoren oder Matrizen gebräuchlichen Übergang $\alpha + i\beta \rightarrow \alpha - i\beta$!!]

(2.3.13) Die Abbildung $*$: $L(2) \rightarrow L(2)$ ist ein **involutorischer Anitautomorphismus der Algebra $L(2)$, der $\mathbb{R}\mathbf{1}$ elementweise fix lässt**, d.h. es gilt

- (i) $*$ ist linear über \mathbb{R}
- (ii) $z^{**} = z$ für alle $z \in L(2)$ ("involutorisch")
- (iii) $(ab)^* = b^*a^*$ für alle $a, b \in L(2)$ ("anti")
- (iv) $z^* = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}\mathbf{1}$ ($\mathbb{R}\mathbf{1}$ fix) und $z^* = -z \Leftrightarrow z \in V$

Mit der Determinante und dem Skalarprodukt hat die Involution $*$ folgendes zu tun:

$$(2.3.14) \quad \mathbf{a}\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a} = \det(\mathbf{a}) \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{b}\mathbf{a}^* = 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{1} \quad \text{für alle } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L(2)$$

Daraus folgt

(2.3.15) $\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^* \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ und $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}^* \perp \mathbf{b}^*$ für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L(2)$, d.h. das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und die entsprechende Orthogonalität sind **Invarianten** der Involution $*$.

Schließlich ergibt (2.3.13) noch eine einfache Formel für das **Invertieren** in $GL(2)$:

$$(2.3.16) \quad \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^* / \det(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in GL(2).$$

2.4 Wahl einer Orthonormalbasis für $L(2)$

Die "natürliche Basis" für die Matrizen $x = (x_{ik})$ in $L(2)$ ist $\mathbf{N} = \{\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ mit

$$\mathbf{n}_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{n}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

In \mathbf{N} haben die Matrizen $x = (x_{ik}) \in L(2)$ die Darstellung

$$(2.4.1) \quad \mathbf{x} = x_{11}\mathbf{n}_0 + x_{12}\mathbf{n}_1 + x_{21}\mathbf{n}_2 + x_{22}\mathbf{n}_3 \quad (x_{ik} \in \mathbb{R})$$

Eine für "geometrische" Betrachtungen oft besser geeignete Basis ist eine solche, welche die Zerlegung $L(2) = \mathbb{R}\mathbf{1} + V$ und die Orthogonalität bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ berücksichtigt. Eine solche **Orthonormalbasis** bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist zum Beispiel $\mathbf{E} = \{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

mit

$$(2.4.2) \quad \mathbf{e}_i \in V \perp \mathbf{1}, \quad \mathbf{e}_i^2 = -\mathbf{1} \quad (i=1,2,3) \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad (i,j,k \text{ zykl. } 1,2,3)$$

und

$$(2.4.3) \quad \det(\mathbf{e}_i) = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = -1 \quad (i=1,2), \quad \det(\mathbf{e}_3) = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = +1, \\ \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle = 0 \quad (i \neq k), \quad \langle \mathbf{1}, \mathbf{e}_k \rangle = 0 \quad (k=1,2,3)$$

In \mathbf{E} haben die Matrizen $x = (x_{ik}) \in L(2)$ die Darstellung

$$(2.4.4) \quad x = \xi_0 \mathbf{1} + \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \xi_3 \mathbf{e}_3 \quad (\xi_i \in \mathbb{R})$$

Die Orthonormalbasis \mathbf{E} geht aus der "natürlichen" Basis \mathbf{N} hervor durch

$$(2.4.5) \quad \mathbf{1} = n_3 + n_0, \quad \mathbf{e}_1 = n_3 - n_0, \quad \mathbf{e}_2 = -n_1 - n_2, \quad \mathbf{e}_3 = n_1 - n_2 \\ \text{oder umgekehrt:} \\ n_0 = (1/2)(\mathbf{1} - \mathbf{e}_1), \quad n_3 = (1/2)(\mathbf{1} + \mathbf{e}_1), \quad n_1 = -(1/2)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad n_2 = -(1/2)(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$$

Skalarprodukt und Determinante nehmen in \mathbf{E} "Normalform" an:

$$(2.4.6) \quad \langle x, y \rangle = \xi_0 \eta_0 - \xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3, \quad \det(x) = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 \\ \text{für } x = \xi_0 \mathbf{1} + \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \xi_3 \mathbf{e}_3, \quad y = \eta_0 \mathbf{1} + \eta_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3$$

2.5 Links- und Rechtsideale in $L(2)$

(2.5.1) DEF – Die wichtigsten Definitionen zu "Ideal":

(a) Ein **Links-** [bzw. **Rechts-]**ideal in einer (assoz.) Algebra A (über K mit $[A:K]=n < \infty$) ist ein K -linearer Teilraum $L \subseteq A$ [bzw. $R \subseteq A$] mit
 $\mathbf{aL} \subseteq L$ bzw. $\mathbf{Ra} \subseteq R$ für alle $a \in A$.

(b) Ist J sowohl Links- als auch Rechtsideal, so heißt J ein **2-seit-Ideal**.

Bem.1: Summen und Durchschnitte von (L- / R-) Idealen ergeben wieder (L- / R-) Ideale (das geht direkt aus der DEF hervor).

(c) Ein Ideal heißt **echt**, wenn es echte Teilmenge von A ist.

(d) Das "größte" Ideal ist A selbst, das "kleinste" ist das Nullideal $\{0\}$. Ein echtes Linksideal $L \subseteq A$ heißt **maximal**, wenn aus $L \subseteq L'$ (ebenfalls "links") folgt: $L' = L$ oder $L' = A$. Ein Linksideal $L \neq \{0\}$ heißt **minimal** (oder einfach), wenn aus $L' \subseteq L$ folgt: $L' = L$ oder $L' = \{0\}$. [Entsprechende DEF. für Rechts- und 2-seit-Ideale].

(e) A heißt **links- / rechts-einfach**, wenn A und $\{0\}$ die einzigen L- / R-Ideale von A sind.

(f) A heißt **einfach**, wenn A und $\{0\}$ die einzigen 2-seit-Ideale von A sind.

Bem.2: Ist A links- bzw. rechts-einfach, so ist A auch einfach; das Umgekehrte gilt nicht: Eine einfache Algebra kann durchaus echte L- und/oder R-Ideale $\neq \{0\}$ haben (Beispiel $L(2)$ - siehe unten!).

(g) A heißt **halbeinfach**, wenn der Durchschnitt R aller maximalen Links-ideale $= \{0\}$ ist.

Bem.3: Da R auch der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale und auch der Durchschnitt aller maximalen 2-seit-Ideale ist (Satz!), erübrigt sich die Unterscheidung "links" / "rechts" bei der Eigenschaft "halbeinfach".

Bem.4: Ist A *links-* bzw. *rechts-einfach* bzw. *einfach*, so auch *halbeinfach* (Umgekehrtes gilt allgemein nicht).

(2.5.2) Alle echten Ideale von $L(2)$ liegen auf dem **Nullkonus** S .

Beweis: Ist $L \subseteq L(2)$ *echtes* Linksideal und $a \in L$, so ist die Abbildung $r_a: x \in A \rightarrow xa \in L$ ein Vektorraum-Homomorphismus, der wegen $\dim L < \dim L(2) = 4$ kein Isomorphismus ist. Es gibt also $x \neq 0$ mit $xa = 0$, d.h. a ist **Nullteiler** $\rightarrow a \in NT$ und wegen (2.3.6): $a \in S$. [Entsprechend für Rechtsideale.]. (Bem: Dass Ideale nur aus *Nullteilern* bestehen, gilt natürlich auch in $L(n)$; nur ist die Nullteilmenge für $n > 2$ kein "Konus".)

(2.5.3) $L(2)$ ist *einfach und halbeinfach*, aber *nicht* links- oder rechts-einfach, sondern der Nullkonus trägt eine Schar von 2-dimensionalen Linksidealen und eine Schar von 2-dimensionalen Rechtsidealen.

Beweis: Ist a eine 2×2 -Matrix, deren 2. Spalte Null ist, so hat xa dieselbe Eigenschaft für alle $x \in L(2)$; a erzeugt also ein 2-dimensionales Linksideal $L_a 0$. Für irgendein $c \in GL(2)$ mit $c \neq 1$ erzeugt ac wieder ein solches Linksideal L_{ac} , und $L_a \cap L_{ac} = \{0\}$, $L_a + L_{ac} = L(2)$. Man bekommt so eine Schar von Linksidealen. Ist b eine 2×2 -Matrix, deren 2. Zeile Null ist, so bekommt man entsprechend eine Schar von 2-dimensionalen Rechtsidealen R_a, R_{ca} . Da eine 2×2 -Matrix nur zwei Spalten und zwei Zeilen hat, sind das alle nichttrivialen Links- bzw. Rechtsideale, und jedes davon ist zugleich maximal und minimal; die einzigen zweiseitigen Ideale sind $\{0\}$ und $L(2)$ selbst.

In der projektiven Darstellung sieht man das anschaulicher.

2.6 Projektive Darstellung der $GL(2, \mathbb{R})$

2.6.1 Projektiver Raum

In 3 Dimensionen "sieht" man besser als in 4. Daher betrachten wir alle bisher ermittelten Figuren **projektiv, indem wir nach dem Körper \mathbb{R} faktorisieren**: Sei abkürzend $L(2)^* := L(2) - \{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$

(2.6.1) DEF: Durch $P: L(2)^* \rightarrow PL(2)^* := L(2)^* / \mathbb{R}^*$ wird $L(2)^*$ auf den reellen 3-dimensionalen projektive Raum projiziert; in ihm liegt die projektive Gruppe $PGL(2) := GL(2) / \mathbb{R}^*$.

Der **0**-Matrix in $L(2)$ entspricht die leere Menge \emptyset in $PL(2)$. Den 1-dimensionalen Teilräumen $\mathbb{R}a$ ($a \neq 0$) entsprechen die **Punkte** P_a in $PL(2)$; den 2-dimensionalen Teilräumen $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ in $L(2)$ (a, b lin. unabhängig) die **Geraden** $P_a + P_b$; den 3-dimensionalen Teilräumen $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b + \mathbb{R}c$ (a, b, c linear unabhängig) die **Ebenen** $P_a + P_b + P_c$ in $PL(2)$.

$PGL(2)$ wird zu einer (Lie-)Gruppe mit der Definition $P_a P_b := P(ab)$ für die Gruppenkomposition.

(2.6.2a) Für $a \in GL(2)$, $b \in L(2)^*$ ist stets $ab \neq 0$, $ba \neq 0$; daher lässt sich die Multiplikation vermöge $P_a P_b := P(ab)$, $P_b P_a := P(ba)$ auf $PL(2)$ übertragen. In diesem Sinne ist $PGL(2)$ eine (multiplikative) Gruppe

(2.6.2b) DEF: Zwei Mengen $A, B \subseteq L(2)^*$ heißen (wie oben) **orthogonal** zu einander, in Zeichen $A \perp B$, wenn $\langle a, b \rangle = 0$ gilt für alle $a \in A$, $b \in B$. Die projektiven Bilder PA, PB heißen ebenfalls **orthogonal** zueinander. Manche Geometer sagten im projektiven Raum auch "**polar**" statt "orthogonal".

2.6.2 Die $PGL(2)$ und ihre Untergruppen

Wir beginnen nun mit der Veranschaulichung der projektiven Gruppe $PGL(2)$ im 3-dimensionalen projektiven Raum $PL(2)$ (siehe Bild 1).

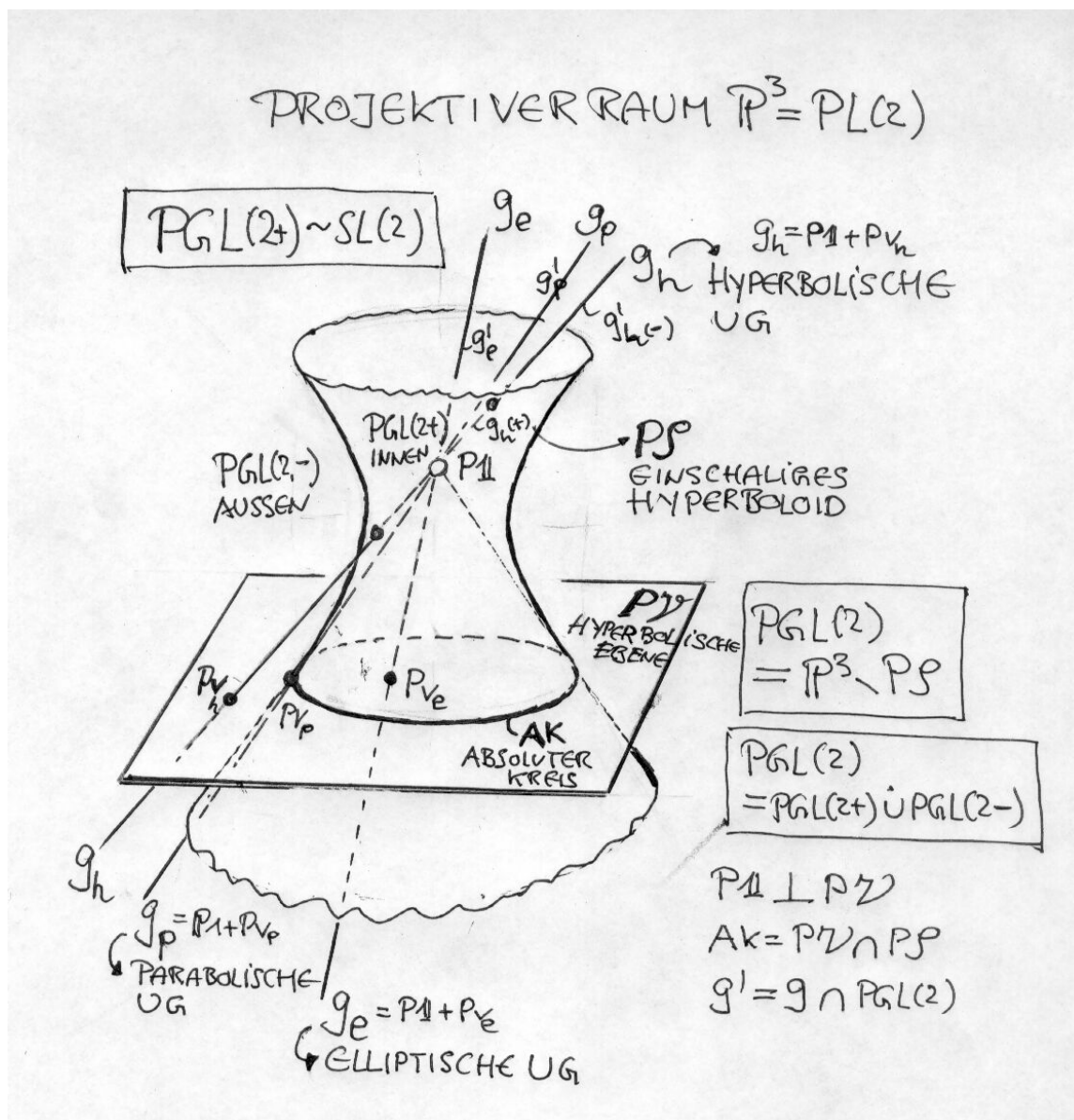


Bild 1: Die $PGL(2, \mathbb{R})$ im projektiven Raum $PL(2, \mathbb{R})$

Dazu betrachten wir die bestimmenden Figuren

(2.6.3) $P_1 =$ Einspunkt von $PGL(2)$

(2.6.4) $PS := \{Pa \mid \det(a)=0\} = PL(2) - GL(2)$, das ist eine quadratische Fläche, und

(2.6.5) $P_V := \{Pa \mid \langle a, 1 \rangle = 0\}$, das ist die zum Einspunkt orthogonale (polare) projektive Ebene.

Mit (2.4.6) ist in der Orthonormalbasis E die Figur PS durch die Gleichung

(2.6.6) $PS: \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$

bestimmt. PS ist ein **einschaliges (Dreh-)Hyperboloid**. Denn setzt man im Vektorraum $L(2)$ zum Beispiel $FR := V$ (also alle Elemente mit $\xi_0 = 0$) als "Ferngebilde" an, so ergibt sich bei Projektion von S aus 0 auf die Restklasse $\mathbf{1} + FR$ für PS die Gleichung $1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$ (einschaliges Drehhyperboloid). Das sieht man auch an den Schnittkurven von PS mit Ebenen:

$$(2.6.7) \quad AK := PS \cap PV : \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 + \xi_3^2 ,$$

das ist für $\xi_3 = \text{const.}$ eine **Kreisgleichung**. Der Kreis AK hat geometrische Relevanz und wird als "**absoluter Kreis**" bezeichnet.

$$(2.6.8) \quad PS \cap (P\mathbf{1} + P\mathbf{e}_2 + P\mathbf{e}_3) : \quad \xi_2^2 - \xi_3^2 = 1 - \xi_1^2 ,$$

das ist für $\xi_1 = \text{const.}$ eine **Hyperbelgleichung**.

PGL füllt also den ganzen projektiven Raum PL(2) bis auf das einschalige Hyperboloid PS aus. Wegen $\det(\lambda a) = \lambda^2 \det(a)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ist das Vorzeichen der Determinante auch projektiv relevant, d.h. PS zerlegt die Gruppe $PGL(2)$ in zwei getrennte Teile

$$(2.6.9) \quad PGL(2,+) := \{Pa \mid \det(a) > 0\}, \quad PGL(2,-) := \{Pb \mid \det(b) < 0\}$$

mit

$$PGL(2) = PGL(2,+) \cup PGL(2,-) ; \quad \text{mit } PGL(2,+) \cap PGL(2,-) = \emptyset$$

$PGL(2,+)$ enthält den Einspunkt $P\mathbf{1}$, wir nennen es das "**Innere**" von PS; entsprechend nennen wir $PGL(2,-)$ das "**Äußere**" von PS. Sieht man von der algebraischen Besonderheit des Einspunktes $P\mathbf{1}$ ab, so unterscheiden sich rein projektiv das "**Innere**" und das "**Äußere**" von PS in keiner Weise! Für ein festes $Pa_0 \in PGL(2,-)$ ist $PGL(2,-) = Pa_0 PGL(2,+)$; und $Pb PS = PS Pb$ für alle $Pb \in PGL(2)$.

Da es beim Repräsentanten $a \in GL(2)$ zum Punkt $Pa \in PGL(2)$ nicht auf reelle Vielfache ankommt, kann man a normieren und sieht:

$$(2.6.10) \quad PGL(2,+) \text{ ist isomorph zu } SL(2) = \{a \in L(2) \mid \det(a) = +1\}$$

Wie sehen die projektiven Bilder von 1-Parametergruppen von $GL(2)$ aus?

Aus (2.3.3b,c) folgt: Die projektiven Bilder von 1-Parametergruppen liegen auf Geraden im $PL(2)$.

$$(2.6.11) \quad \text{Für jede Gerade durch den Einspunkt, } g = P\mathbf{1} + Pa \text{ (} a \notin \mathbb{R}\mathbf{1}\text{), ist}$$

$$g' := g \cap PGL(2) \text{ eine kommutative Untergruppe von } PGL(2).$$

Da g die zu $P\mathbf{1}$ orthogonale (polare) Ebene PV in genau einem Punkt Pv schneidet, kann man die Untergruppe g' auch durch

$$(2.6.12) \quad g' := (P\mathbf{1} + Pv) \cap PGL(2)$$

ausdrücken. Je nachdem, wo Pv bezüglich des absoluten Kreises **AK** liegt ergibt sich für die Gruppe g' :

$$(2.6.13e) \quad \text{Für } Pv \text{ innerhalb } \mathbf{AK} \text{ liegt die tragende Gerade } g \text{ ganz in } PGL(2) \text{ und}$$

$$\text{schneidet das Hyperboloid PS nicht, also } g' = g. \text{ Die UG } g' \text{ heißt } \mathbf{elliptisch}.$$

$$(2.6.13p) \quad \text{Für } Pv \text{ auf } \mathbf{AK} \text{ berührt die tragende Gerade } g \text{ das Hyperboloid PS nur im}$$

$$\text{Punkt } Pv. \text{ } Pv \text{ ist der einzige Punkt auf } g, \text{ der nicht zu } g' \text{ gehört:}$$

$$g' = g - Pv. \text{ Die UG } g' \text{ zerfällt nicht (!) und heißt } \mathbf{parabolisch}.$$

$$(2.6.13h) \quad \text{Für } Pv \text{ außerhalb } \mathbf{AK} \text{ schneidet die tragende Gerade } g \text{ das Hyperboloid}$$

$$\text{PS in zwei Punkten. Die UG } g' \text{ zerfällt in zwei (!) Teile, die Komponente } g'_+$$

in $PGL(2, +)$, die die Eins enthält und die Nebenklasse g' in $PGL(2, -)$. Die UG g' heißt **hyperbolisch**.

2.6.3 Invariante Parametrisierung

Nun wollen wir diese Untergruppen g' in **invarianter** Weise parametrisieren:

Sei $\exp_a : t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(at) \in GL(2)$ eine 1-Parametergruppe ($a \notin \mathbb{R}1$). Wegen (2.3.4) liegt dann $P\exp(at)$ für alle t auf der Gerade $g = P1 + Pa$. Mehr noch: Für **jedes** $b \in \mathbb{R}1 + \mathbb{R}a$ ($1, a$ linear unabhängig) liegt $P\exp(bt)$ für alle t auf der Gerade $g = P1 + Pa = P1 + Pb$, d.h. die projektiven Bilder aller 1-Parametergruppen \exp_b liegen auf **derselben** Gerade $g = P1 + Pa$, wenn Pb auf g liegt.

Für eine **invariante** Parametrisierung der Untergruppe g' auf $g = P1 + Pa$ nehmen wir den **normierten** Repräsentanten $v \in V$ des Punktes $Pv = g \cap PV$, es ist also

$$(2.6.14) \quad \begin{array}{ll} \det(v) = +1 & \text{im elliptischen Fall,} \\ \det(v) = 0 & \text{im parabolischen Fall,} \\ \det(v) = -1 & \text{im hyperbolischen Fall.} \end{array}$$

Dann ist

$$(2.6.15) \quad \exp_v : t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) = \exp(tv) \in GL(2)$$

eine (bis auf das Vorzeichen von t) eindeutige Parametrisierung der auf $g = P1 + Pv$ liegenden Untergruppe g' in der Umgebung der Eins, also eine Parametrisierung der Komponente g'_+ . Wegen $d \exp(tv) / dt |_{t=0} = v$ ist v Tangentenvektor an g'_+ im Einspunkt $P1$, also ist

$$(2.6.16) \quad V = T_1(PGL(2)) \text{ ist Tangentialraum von } PGL(2) \text{ im Einspunkt.}$$

Man zeigt in der Algebra $L(2)$ leicht, dass gilt:

$$(2.6.17) \quad u, v \in V \rightarrow [u, v] := uv - vu \in V.$$

Beweis mit (2.3.13): $u, v \in V \rightarrow [u, v]^* = (uv - vu)^* = v^*u^* - u^*v^* = vu - uv = -[u, v] \rightarrow [u, v] \in V$ (wobei $*$ die in (2.3.13) eingeführte Involution ist)

Diese **Lie-Klammer** erfüllt auch die Jakobi-Identität: $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ für alle $u, v, w \in V$.

$$(2.6.18) \quad \text{Also ist } (V, [,]) \text{ die } \mathbf{Lie-Algebra} \text{ der projektiven Gruppe } PGL(2) \\ \text{[oder auch der in } GL(2) \text{ enthaltenen Matrixgruppe } SL(2) \text{].}$$

Schließlich können wir für **normiertes** $v \in V$, $v^2 \in \{1, 0, -1\}$, gemäß (2.3.3c) die "geometrisch" anschaulicheren Funktionen "**Co_v**" und "**Si_v**" durch

$$(2.6.19) \quad \begin{array}{l} \mathbf{Co}_v : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{Co}_v(t) := (1/2) (\exp(tv) + \exp(-tv)) \in \mathbb{R}1 \\ v \mathbf{Si}_v : t \in \mathbb{R} \rightarrow v \mathbf{Si}_v(t) := (1/2) (\exp(tv) - \exp(-tv)) \in V \end{array}$$

einführen; so ergibt sich für die Parameterdarstellung einer projektiven 1-Parametergruppe **innerhalb** $PGL(2, +)$ mit normiertem Tangentenvektor $v \in V$ im Einspunkt:

$$(2.6.20) \quad \exp(tv) = \mathbf{Co}_v(t) + v \mathbf{Si}_v(t) = \begin{array}{ll} \cos t \mathbf{1} + \sin t \mathbf{v} & \text{für } \det(v) = +1 \text{ (ellipt.)} \\ \mathbf{1} + t \mathbf{v} & \text{für } \det(v) = 0 \text{ (parabol.)} \\ \cosh t \mathbf{1} + \sinh t \mathbf{v} & \text{für } \det(v) = -1 \text{ (hyperbol.)} \end{array}$$

Daraus sieht man auch, warum die Fälle 1 bzw. 3 "elliptisch" bzw. "hyperbolisch" genannt wurden: Die Urbilder in $L(2)$ einer elliptischen Untergruppe sind *Ellipsen*; die Urbilder in $L(2)$ einer hyperbolischen UG sind *Hyperbeln*. (Die Urbilder einer "parabolischen" UG sind in $L(2)$ allerdings keine Parabeln, sondern Geraden!)

Mit den eben eingeführten Funktionen kann man auch die Nebenklasse g' in $PGL(2, -)$ (hyperbolischer Fall) parametrisieren:

$$(2.6.21) \quad g' : t \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Sinht } \mathbf{1} + \text{Cosht } \mathbf{v} \quad (\det(\mathbf{v}) = -1)$$

2.6.4 "Rechts-" und "Linksschiebungen" im Raum $PL(2)$

Wir lassen die Gruppe $GL(2)$ als "Rechts- und Links-Schiebungen" auf den Vektorraum $L(2)$ wirken:

$$\begin{array}{ll} a \in GL(2) : \text{"Rechtsschiebung"} & r_a : x \in L(2) \rightarrow xa \in L(2) \\ & \text{"Linksschiebung"} & l_a : x \in L(2) \rightarrow ax \in L(2) \end{array}$$

Rechts- und Linksschiebungen erhalten übrigens die Orthogonalität (Polarität), wie man aus (2.3.1a) erkennt, und lassen das Hyperboloid PV invariant.

Um diese Wirkung im projektiven Raum sichtbar zu machen, nehmen wir statt der Orthogonalbasis $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ günstiger die Nullteilerbasis

$$n_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad n_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad n_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad n_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

denn das "Sichtbare" bei Links- und Rechtschiebungen findet auf dem Hyperboloid PS statt, wo die Pn_i liegen. Die Nullteilerbasis geht aus $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ durch

$$2n_0 = 1 + e_1, \quad 2n_1 = 1 - e_1, \quad 2n_2 = e_2 + e_3, \quad 2n_3 = e_2 - e_3$$

hervor. Eine kleine Fleißrechnung [vgl. (2.5.3)] zeigt:

$$(2.6.22) \quad \begin{array}{l} L := L(2) \quad n_0 = Rn_0 + Rn_3 \\ L^* := L(2) \quad n_1 = Rn_1 + Rn_2 \quad (*: L(2) \rightarrow L(2) \text{ bezeichnet die in (2.3.12) definierte Involution}) \\ \text{sind } \underline{\text{maximale Linksideale}} \text{ mit } L^* \perp L, \quad L^* \cap L = \{0\}, \text{ und alle anderen} \\ \text{maximalen Linksideale sind von der Form } La \quad (a \in GL(2)) \end{array}$$

$$(2.6.23) \quad \begin{array}{l} R := n_0 L(2) = Rn_0 + Rn_2 \\ R^* := n_1 L(2) = Rn_1 + Rn_3 \\ \text{sind } \underline{\text{maximale Rechtsideale}} \text{ mit } R^* \perp R, \quad R^* \cap R = \{0\}, \text{ und alle anderen} \\ \text{maximalen Rechtsideale sind von der Form } aR \quad (a \in GL(2)) \end{array}$$

Schauen wir uns das im projektiven Raum $PL(2)$ an. Das Hyperboloid PS trägt zwei Geradenscharen:

$PL = Pn_0 + Pn_3$ und $PL^* = Pn_1 + Pn_2$ sind zwei zueinander orthogonale (polare) Geraden der ersten Schar, und alle anderen Geraden dieser Schar bekommt man durch "Rechtsschiebungen" $PL \rightarrow PLPa$ ($a \in GL(2)$ beliebig). PL und alle Geraden der ersten Schar bleiben bei "Linksschiebungen" invariant - Siehe Bild 2.

$PR = Pn_0 + Pn_2$ und $PR^* = Pn_1 + Pn_3$ sind zwei zueinander orthogonale (polare) Geraden der zweiten Schar, und alle anderen Geraden dieser Schar bekommt man durch "Linksschiebungen" $PR \rightarrow PaPR$ ($a \in GL(2)$ beliebig). PR und alle Geraden der zweiten Schar bleiben bei "Rechtsschiebungen" invariant - Siehe Bild 3.

Zur kontinuierlichen Ausführung aller Rechts- bzw. Linksschiebungen genügt eine beliebige 1-Parametergruppe $t \in \mathbb{R} \rightarrow a(t) = \exp(tv) = \cos t \mathbf{1} + \sin t \mathbf{v}$ aus $GL(2, +)$.

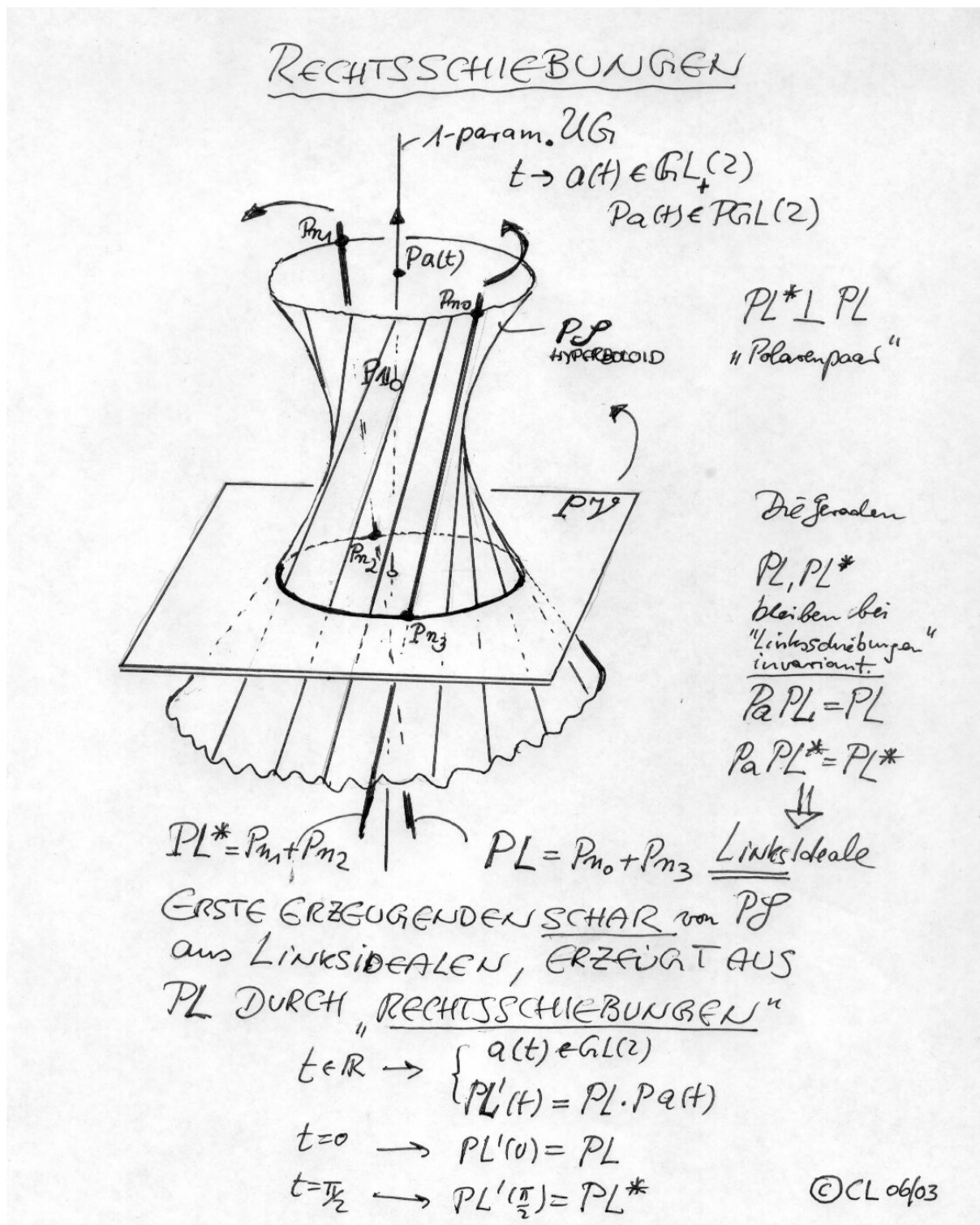


Bild 2: Rechtsschiebungen erzeugen auf PS die ERSTE GERADENSCHAR $PL'(t)$ und lassen die ZWEITE GERADENSCHAR von PS invariant.

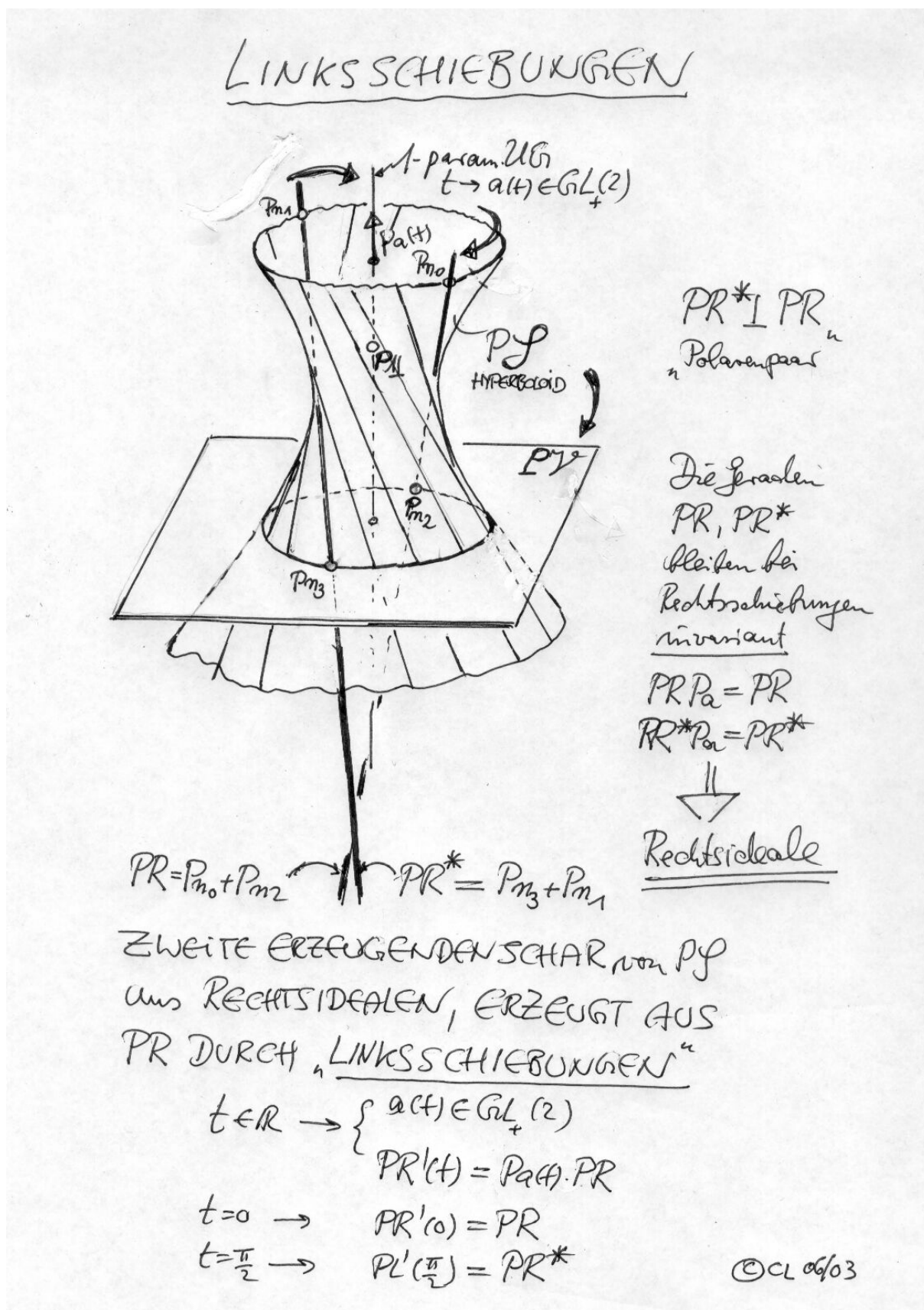


Bild 3: Linksschiebungen erzeugen auf PS die ZWEITE GERADENSCHAR $PR(t)$ und lassen die ERSTE GERADENSCHAR von PS invariant.

2.6.5 "Drehungen" im Raum $PL(2)$ und in der Ebene PV

Schließlich kann man $GL(2)$ bzw. $PGL(2)$ noch in der "**adjungierten**" (nicht-treuen) Form auf $L(2)$ bzw. $PL(2)$ wirken lassen. Diese Form nannten die Geometer auch "Drehungen":

$$a \in GL(2): \text{"Drehung"} \quad ad(a) : x \in L(2) \rightarrow ad(a)x = a^{-1} x a \in L(2)$$

Die "Drehungen" lassen in $PL(2)$ den Einspunkt $P1$ und die dazu orthogonale Ebene PV und natürlich auch das Hyperboloid PS invariant, damit auch den "**absoluten Kreis**" $AK = PS \cap PV$. $ad(GL(2))$ hat man daher als die "**Bewegungsgruppe der Hyperbolischen Ebene**" PV aufgefasst. Je nachdem, wo Pa in $PGL(2)$ liegt, ergeben sich verschiedene Typen von "Drehungen" $ad(a)$.

Sei $a \in GL(2)$, dann unterscheiden wir projektiv drei Fälle:

- (2.6.24) $ad(a)$ heißt "Innendrehung", wenn $Pv = (P1+Pa) \cap PV$ innerhalb des absoluten Kreises liegt. (Die Gerade $g = P1+Pa$) schneidet das Hyperboloid PS nicht; die Untergruppe $g' = g \cap GL(2)$ ist elliptisch.)
- (2.6.25) $ad(a)$ heißt "Grenzdrehung", wenn $Pv = (P1+Pa) \cap PV$ auf dem absoluten Kreis AK liegt. (Die Gerade $g = P1+Pa$ liegt auf dem "Grenzkegel"; das ist der Kegel mit Spitze in $P1$, welcher das Hyperboloid PS im absoluten Kreis AK berührt; die Untergruppe $g' = g \cap GL(2)$ ist parabolisch.)
- (2.6.26) $ad(a)$ heißt "Außendrehung", wenn $Pv = (P1+Pa) \cap PV$ außerhalb des absoluten Kreises AK liegt. (Die Gerade $g = P1+Pa$ schneidet das Hyperboloid PS in zwei Punkten; die Untergruppe $g' = g \cap GL(2)$ ist hyperbolisch und zerfällt in 2 Teile.)

Der Name "Drehung" für $ad(a)$ kommt daher, weil $g = P1+Pa$ und Pv bei $ad(a)$ **invariant** bleiben: In allen drei Fällen kann man die Gerade $g = P1+Pa$ als "Drehachse" im Raum $PL(2)$ bzw. den Punkt Pv als "Drehzentrum" in der Ebene PV auffassen.

Bild 4 zeigt diese 3 Typen.

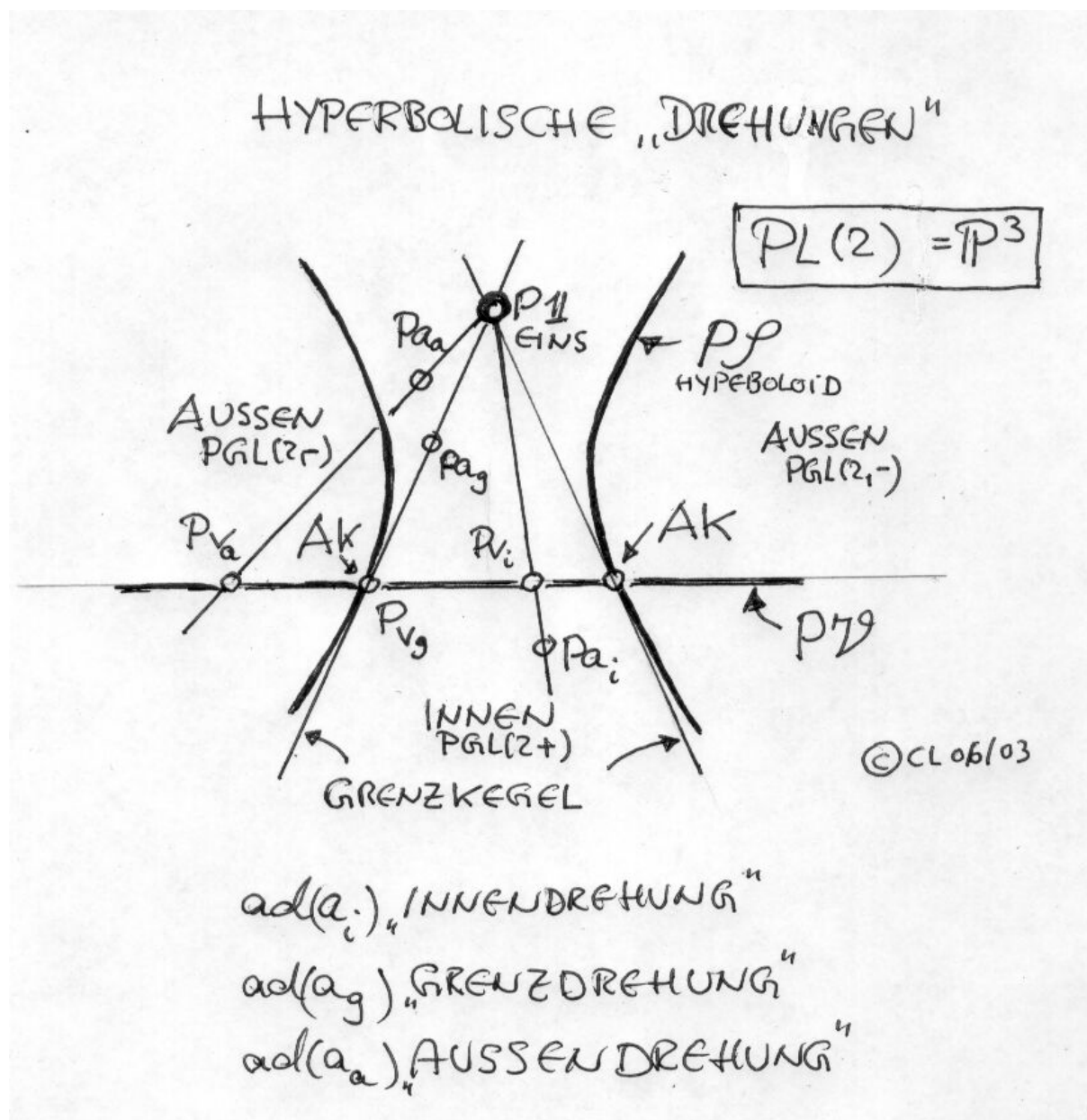


Bild 4: Hyperbolische "Drehungen"

2.6.6 Geradenabbildung

Noch eine Grundaufgabe der "Klassischen Kinematik" möchte ich erwähnen, weil sie ebenfalls sehr anschaulich ist:

Bestimme alle Bewegungen (einer euklidischen oder nichteuklidischen ebenen Bewegungsgruppe) die einen gegebenen Punkt X in einen gegebenen Punkt Y überführen.

Wenden wir diese Aufgabe auf die als "hyperbolische Bewegungsgruppe" $ad(GL(2))$ in der projektiven Ebene PV wirkende Gruppe $GL(2)$ bzw. $PGL(2)$ an:

Sei g eine beliebige Gerade des Raumes $PL(2)$, die nicht ganz auf dem Hyperboloid PS liegt, dann gibt es Punkte auf $g \cap PGL(2)$; sei $P_a \in g \cap PGL(2)$ beliebig. Dann definieren wir folgende zwei Punkte:

$$(2.6.27) \quad X_L := g Pa^{-1} \cap PV \quad X_R := Pa^{-1} g \cap PV$$

Diese Definition ist von der Wahl des Punktes Pa auf $g \cap PGL(2)$ unabhängig!

Beweis (für X_L): $g' = g Pa^{-1} \cap PGL(2)$ ist 1-Parameter-Untertgruppe und X_L ist das projektive Bild ihres Liecelements, und dies ist von den Punkten auf g' unabhängig.

Multiplizieren wir die erste Gleichung von (2.6.27) links mit Pa^{-1} und rechts mit Pa , so folgt wegen der Invarianz $Pa^{-1} PV Pa = PV$:

$$(2.6.28) \quad X_R = Pa^{-1} X_L Pa = P(\text{ad}(a)) X_L \quad \text{für alle } Pa \in g \cap PGL(2)$$

D.h. alle Punkte $Pa \in g \cap PGL(2)$ ergeben "Drehungen" der hyperbolischen Ebene PV , welche X_L in X_R überführen. Ist umgekehrt $\text{ad}(b)$ eine "Drehung", die X_L in X_R überführt, $X_R = Pb^{-1} X_L Pb$, so ergibt sich $Pb \in g \cap PGL(2)$, d.h. mit $g \cap PGL(2)$ sind **alle** "Drehungen" erfasst, welche X_L in X_R überführen.

Ist $GPGL(2)$ die Menge der Geraden im Raum $PGL(2)$, die nicht ganz auf dem Hyperboloid PS liegen ("zulässige" Geraden), so bekommen wir eine **Geradenabbildung**

$$(2.6.29) \quad \gamma : GPGL(2) \rightarrow PV \times PV; \quad g \rightarrow (\gamma_L(g), \gamma_R(g)) = (X_L, X_R)$$

mit

$$\gamma_L(g) := X_L := g Pa^{-1} \cap PV \quad (\text{linkes Geradenbild})$$

$$\gamma_R(g) := X_R := Pa^{-1} g \cap PV \quad (\text{rechtes Geradenbild})$$

und

$$b \in g \cap PV \Leftrightarrow X_R = Pb^{-1} X_L Pb$$

Die Abbildung γ ist *umkehrbar*, wenn X_L und X_R beide im Inneren oder beide im Äußeren des "absoluten Kreises" AK liegen.

Zwischen der Abbildung γ und der Polarenbeziehung besteht ein einfacher Zusammenhang. Ist g^* die Polare von g ($g^* \perp g$), so gilt:

$$(2.6.30) \quad (\gamma_L(g^*), \gamma_R(g^*)) = (\gamma_R(g), \gamma_L(g)).$$

Denn aus (2.3.16) folgt für $a \notin S$: Liegt Pa auf g , so liegt $P(a^{-1}) = Pa^*$ auf der Polaren g^* .

Auch zu dieser Geradenabbildung gibt es eine sehr schöne Veranschaulichung (Bild 5), die ich aber lieber mündlich erläutere.

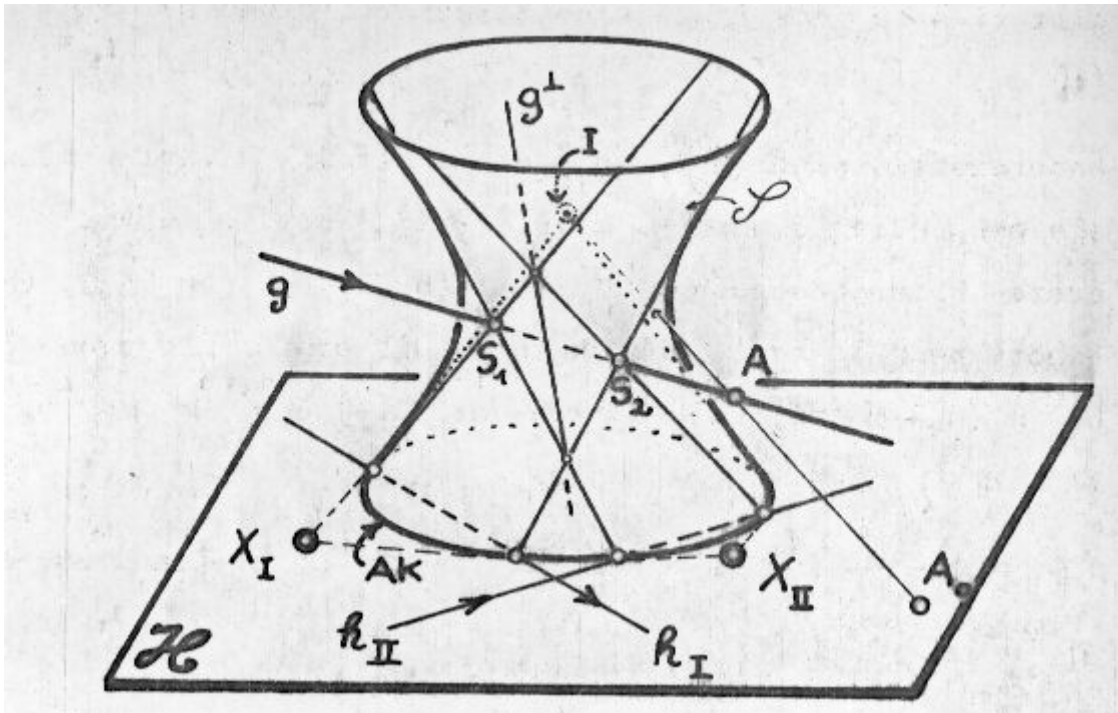


Bild 5: Die kinematische Geradenabbildung im $PGL(2)$ nach ECKHART-REHBOCK

→ Fortsetzung Kap.3